

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет

Кафедра радиофизики

М.М. КАРЛИНЕР

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЧ

Курс лекций

НОВОСИБИРСК
1999

Предлагаемый курс лекций “Электродинамика СВЧ” читался в течение ряда лет для студентов физического факультета НГУ, специализирующихся на кафедре радиофизики.

Курс содержит теорию длинных линий, волноводов, резонаторов, взаимных устройств: вентилях и циркуляторов. В данной работе представлены не только основные свойства элементов СВЧ-техники, но и методы их расчетов: квазистатический, метод частичных областей, вариационные методы и др. Применение этих методов иллюстрировано соответствующими примерами.

Курс лекций предназначен для студентов различных специальностей, а также для аспирантов и других специалистов, связанных с СВЧ-техникой.

Печатается по решению методической комиссии физического факультета

Рецензент: канд. техн. наук В.Д. Шемелин

1	Общие сведения из теории электромагнитного поля	7
1.1	Уравнения Максвелла	7
1.2	Система единиц	9
1.3	Граничные условия	9
1.4	Энергия электромагнитного поля	11
1.5	Теорема единственности	13
1.6	Решения уравнений Максвелла	14
1.7	Скин-эффект и граничные условия	20
1.8	Электродинамическое подобие	25
2	Теория длинных линий	27
2.1	Поперечные волны в линии передачи	27
2.2	Напряжение, ток и мощность в ТЕМ-линии	30
2.3	Коаксиальная линия	34
2.4	Двухпластинчатая линия	35
2.5	Двухпроводная линия	36
2.6	Телеграфные уравнения	36
2.7	Отражение от нагрузки	39
2.8	Трансформация сопротивлений и проводимостей	41
	2.8.1 Короткозамкнутая линия	42
	2.8.2 Разомкнутая линия	43
	2.8.3 Линия, замкнутая на активное сопротивление	43
	2.8.4 Линия, замкнутая на реактивное сопротивление	44
2.9	Трансформация сопротивлений отрезками линии	45
	2.9.1 Полуволновый отрезок	45
	2.9.2 Четвертьволновый отрезок	45
2.10	Представление отрезка линии Т-образным четырёхполосником	47
2.11	Номограмма полных сопротивлений (диаграмма Смита)	48
	2.11.1 Преобразование коэффициента отражения отрезком линии	48
	2.11.2 Номограмма полных сопротивлений	48
2.12	Многопроводные линии ТЕМ	50
2.13	Линия с малыми потерями	55

3	Волноводы	57
3.1	Выражение векторов поля через потенциальные функции. Е- и Н-моды	57
3.2	Прямоугольные волноводы	68
3.2.1	Волны Н-типа	68
3.2.2	Волны Е-типа	74
3.3	Круглые волноводы	78
3.3.1	Магнитные моды	78
3.3.2	Электрические моды	83
3.3.3	Волноводные моды в коаксиальной линии	86
3.4	Волноводы с сечением сложной формы и квазистатические волноводы	88
3.5	Энергетические соотношения для волноводов	92
3.6	Фазовая и групповая скорости	94
3.7	Волны Бриллюэна	97
3.8	Затухание в волноводах	98
3.8.1	Прямоугольный волновод. H_{10} -мода	104
3.8.2	Круглый волновод. Мода H_{01}	105
4	Теория цепей в расчетах волноводов	107
4.1	Волноводная линия передачи	107
4.2	Телеграфные уравнения для Н-волн в волноводе	109
4.3	Оконечное устройство (двухполюсник)	113
4.3.1	Полное сопротивление и проводимость	114
4.3.2	Волны в оконечном устройстве	115
4.4	Соединение нескольких волноводов	116
4.4.1	Матрицы сопротивления и проводимости	117
4.4.2	Симметрия матрицы сопротивления (проводимости)	118
4.4.3	Многополюсное сочленение без потерь	120
4.4.4	Вариация матрицы сопротивления (проводимости) сочленения без потерь	121
4.4.5	Обобщение на случай волноводов, по которым могут распространяться волны нескольких мод	124
4.4.6	Матрица рассеяния	125
4.4.7	Свойства матрицы рассеяния	127
4.4.8	Энергетические соотношения	128
4.4.9	Преобразование матрицы рассеяния при переносе отсчетных плоскостей	130
4.4.10	Двойной тройник	131

4.5	Частотные свойства	134
4.5.1	Частотная зависимость матрицы сопротивления (проводимости) сочленения без потерь	134
4.5.2	Частотная зависимость матрицы рассеяния	137
4.5.3	Оконечное устройство	137
4.6	Неоднородности в волноводах	139
4.6.1	Представление неоднородности в виде четырёхполюсника	139
4.6.2	Скачкообразное изменение параметров вещества, заполняющего волновод	140
4.6.3	Диафрагмы в волноводе	142
4.6.4	Вариационные методы	146
4.6.5	Приближенное вычисление проводимости	148
4.6.6	Вариационные методы. Метод Ритца	149
4.6.7	Вариационные методы. Метод Галеркина	152
4.6.8	Диафрагмы в прямоугольном волноводе	154
4.6.9	Соединение волноводов различного сечения	156
4.6.10	Согласование волноводов многоступенчатыми переходами	165
5	Возбуждение волноводов заданными токами	171
5.1	Лемма Лоренца. Электрические и магнитные токи	172
5.2	Возбуждение волноводов электрическими и магнитными токами	175
5.3	Другой вывод формулы возбуждения электрическими и магнитными токами	181
6	Резонаторы	185
6.1	Свободные колебания в резонаторах	185
6.2	Собственные функции и собственные значения. Ортогональность собственных функций	185
6.3	Резонаторы, образованные из отрезков линии передачи	190
6.4	Примеры резонаторов, образованных из отрезков линии передачи	192
6.5	Приближенные методы расчета частоты свободных колебаний резонаторов	196
6.5.1	Квазистатический метод	196
6.5.2	Примеры: тороидальный резонатор, резонатор “щель – отверстие”	197

6.5.3	Метод частичных областей	199
6.5.4	Примеры	200
6.5.5	Вариационный метод. Формула возмущений	204
6.6	Потери в резонаторах	208
6.6.1	Примеры расчета добротности	213
6.6.2	Потери в среде	216
6.6.3	Потери на излучение	217
6.7	Вынужденные колебания в резонаторах	218
6.7.1	Возбуждение резонатора заданными токами	218
6.7.2	Возбуждение резонатора потоком заряженных частиц	223
6.7.3	Другие способы возбуждения резонаторов	228
6.8	Резонатор как элемент линии передачи	229
6.8.1	Входное сопротивление резонатора	230
6.8.2	Применение резонаторов	237
7	Электромагнитные волны в гиромагнитной среде	239
7.1	Свойства ферритов	239
7.2	Распространение плоских волн в намагниченном феррите	246
7.2.1	Продольно намагниченный феррит	246
7.2.2	Поперечно намагниченный феррит	250
7.3	Распространение волн в волноводе, частично заполненном ферритом	252
7.4	Вентили и циркуляторы	259
7.4.1	Феррит в прямоугольном волноводе	260
7.4.2	Коаксиальный вентиль	262
7.4.3	Циркуляторы	262

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле в любой среде описывается четырьмя векторами \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} , из которых первые два характеризуют электрическое поле, а вторые – магнитное. В уравнениях поля содержатся также величины: ρ – плотность заряда и векторная величина \vec{J} – плотность тока. Уравнения Максвелла, связывающие между собой векторы поля, определяют электромагнитное поле:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}.$$

Плотность заряда и плотность тока связаны уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0,$$

которое может быть получено из закона сохранения заряда. Как следствие из уравнений Максвелла и уравнения непрерывности могут быть получены еще два уравнения, которые иногда относят к системе уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Приведенных уравнений недостаточно для определения векторов поля, если заданы источники поля ρ и \vec{J} . Данная система должна быть дополнена так называемыми материальными уравнениями, описывающими влияние среды (для линейной среды):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{J}_{\text{пр}} = \sigma \vec{E}.$$

Величины ε , μ и σ могут быть тензорными, а иногда дифференциальными или интегральными операторами. В дальнейшем эти величины будут рассматриваться как скалярные, кроме заранее оговоренных случаев.

С учетом материальных уравнений система уравнений Максвелла становится полной.

В дальнейшем нас будут интересовать прежде всего гармонические процессы, когда зависимость полей от времени имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}(r) \cdot e^{j\omega t},$$

где $\vec{E}(r)$ – комплексная амплитуда, в общем случае зависящая от координат. Уравнения Максвелла линейны, если линейны материальные уравнения.

Если зависимость от времени представлена множителем $e^{j\omega t}$, то уравнения Максвелла могут быть записаны в комплексной форме:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J},$$

где все векторы поля представляют собой комплексные амплитуды.

Используя материальные уравнения, эти уравнения можно записать в виде

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J}.$$

Так как связь между \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} может описываться дифференциальными уравнениями (временными), то в общем случае ϵ и μ следует считать комплексными числами ($\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$, $\mu = \mu' - j\mu''$).

Ток \vec{J} складывается из тока проводимости и стороннего тока, вызванного источниками:

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{пр}} + \vec{J}_{\text{стор}} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_{\text{стор}}.$$

Подставляя \vec{J} в уравнения Максвелла, получим

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \sigma \vec{E} + \vec{J}_{\text{стор}}.$$

Последнее уравнение может быть записано в следующем виде:

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_k \vec{E} + \vec{J}_{\text{стор}},$$

где

$$\epsilon_k = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}.$$

Следует иметь в виду, что в теории гармонических полей уравнения, в которые входит плотность заряда, не имеют самостоятельного значения, так как плотность заряда однозначно определяется плотностью тока:

$$\rho = -\frac{1}{j\omega} \text{div } \vec{J}.$$

1.2. Система единиц

Приведенная выше система уравнений Максвелла записана в системе единиц СИ, которая была принята в 1960 г. на II Генеральной конференции по мерам и весам. В СССР система СИ введена в 1963 г.

В системе СИ в качестве основных единиц приняты следующие: метр – длина, килограмм – масса, секунда – время; в качестве единицы силы тока принят ампер. В связи с этим величины ε и μ имеют размерность

$$[\varepsilon] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\Phi}{\text{м}}; \quad [\mu] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Удельная проводимость в этой системе имеет размерность

$$[\sigma] = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Сим}}{\text{м}}.$$

Следует отметить, что для вакуума ε и μ имеют определенные значения, а именно:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}; \quad \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \approx 0.884 \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Величина

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$$

имеет размерность сопротивления. Ее называют волновым сопротивлением вакуума; физический смысл этого названия будет ясен из дальнейшего.

Другие единицы в системе СИ (производные) следующие: разность потенциалов – вольт, заряд – кулон, сопротивление – ом, сила – ньютон, энергия – джоуль, мощность – ватт. Единицы магнитного поля: поток – вебер, равный 10^8 максвелл, индукция – тесла, равный 10^4 гаусс. Напряженность электрического поля – В/м, магнитного поля – А/м ($0.4\pi \cdot 10^{-2}$ эрстед).

1.3. Граничные условия

Граничные условия, т.е. условия для векторов поля на границе двух сред с различными характеристиками, имеют следующий вид:

$$1. (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0,$$

где \vec{B}_1 и \vec{B}_2 – векторы индукции магнитного поля в средах 1 и 2, \vec{n} – единичный вектор нормали к границе сред. Это условие можно сформулировать следующим образом: нормальная компонента \vec{B} непрерывна при переходе через границу.

$$2. (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_{\text{пов}},$$

где $\sigma_{\text{пов}}$ – поверхностная плотность заряда, т.е. заряд, отнесенный к единице площади поверхности, причем вектор нормали направлен из среды 1 в среду 2. Если на поверхности нет заряда, то нормальная компонента \vec{D} непрерывна.

Поведение тангенциальных компонент определяется условиями:

$$3. \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0,$$

т.е. тангенциальная компонента \vec{E} непрерывна при переходе через границу.

$$4. \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K},$$

где \vec{K} – поверхностная плотность тока, \vec{n} – нормаль из среды 1 в среду 2. Величина \vec{K} определяется следующим образом. Пусть токи проводимости сосредоточены в тонком слое толщиной Δl около поверхности разрыва. Тогда ток на единицу длины линии, ортогональной линиям вектора \vec{K} , равен $\vec{J} \cdot \Delta l$.

Перейдем к пределу $\Delta l \rightarrow 0$. Если $\vec{J} \rightarrow \infty$, то произведение $\vec{J} \cdot \Delta l$ может стремиться к конечному пределу

$$\vec{K} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \vec{J} \cdot \Delta l.$$

Очевидно, что для этого проводимость одной из сред должна быть бесконечно большой. В случае конечной проводимости обеих сред

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0,$$

т.е. тангенциальная компонента \vec{H} непрерывна.

1.4. Энергия электромагнитного поля

Как известно, энергия электромагнитного поля складывается из энергии электрического поля и энергии магнитного поля

$$W = \int \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV$$

при условии, что μ и ε – вещественные величины, не зависящие от частоты.

Из уравнений Максвелла можно получить теорему Пойнтинга:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS,$$

где V – некоторый объем электромагнитного поля, \vec{n} – единичный вектор нормали, направленный наружу замкнутой поверхности S , ограничивающей объем.

Вектор $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ называют вектором Пойнтинга. Его смысл следует из теоремы Пойнтинга: это плотность потока энергии через поверхность.

Аналогичное соотношение может быть получено для комплексных амплитуд. Для этого будем исходить из уравнений Максвелла в комплексной форме

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}.$$

Для вывода используем известное векторное тождество

$$\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H}^*,$$

где \vec{H}^* – комплексно-сопряженная амплитуда. Подставляя сюда $\text{rot } \vec{E}$ и $\text{rot } \vec{H}^*$ из уравнений Максвелла, получим

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{E} \times \vec{H}^*) &= \vec{H}^* \cdot (-j\omega\mu\vec{H}) - \vec{E} \cdot (-j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}^*) = \\ &= j\omega\varepsilon|\vec{E}|^2 - j\omega\mu|\vec{H}|^2 - \vec{E} \cdot \vec{J}^* \end{aligned}$$

в предположении, что ε и μ – вещественные величины.

Проинтегрируем полученное равенство по объему V , ограниченному поверхностью S :

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} dS = 2j\omega \int_V \left(\frac{\mu |\vec{H}|^2}{2} - \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{2} \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J}^* dV,$$

где \vec{n} – единичный вектор *внутренней* нормали.

Предположим, что внутри объема V отсутствуют сторонние токи. Тогда $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Подставляя в приведенное выше равенство, после деления на 2 получим

$$\frac{1}{2} \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV + j\omega \int_V \left(\frac{\mu |\vec{H}|^2}{2} - \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{2} \right) dV.$$

Выясним смысл слагаемых в правой части. Очевидно, что интеграл

$$P = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\vec{E}|^2 dV$$

представляет собой среднюю мощность, рассеиваемую внутри объема V вследствие наличия токов проводимости. Второй интеграл выражается через средние значения запасенной энергии электрического и магнитного полей

$$\int_V \frac{\mu |\vec{H}|^2}{2} dV = 2W_H, \quad \int_V \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{2} dV = 2W_E,$$

где W_H и W_E – средние значения запасов магнитной и электрической энергии. Итак,

$$\frac{1}{2} \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{n} dS = P + 2j\omega (W_H - W_E).$$

Вектор $\vec{S}_k = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$ называют комплексным вектором Пойнтинга. Его вещественная часть представляет собой среднюю плотность потока энергии через поверхность; мнимую часть этого вектора называют плотностью реактивной мощности.

1.5. Теорема единственности

Задачи, решаемые в электродинамике СВЧ, делятся на два основных класса: внутренние и внешние.

Во внутренних задачах рассматривается поле в некоторой области пространства, ограниченной заданной поверхностью S . Внутри S заданы сторонние токи, а на самой поверхности – либо тангенциальная компонента электрического поля E_t (например, на S_1), либо тангенциальная компонента магнитного поля H_t (на S_2).

Докажем теорему единственности для внутренней задачи. Предположим обратное: пусть при одинаковых токах и одинаковых значениях тангенциальных компонент полей на поверхности S \vec{E}_1, \vec{H}_1 – одно решение, а \vec{E}_2, \vec{H}_2 – другое. Тогда $\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$ и $\vec{H} = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$ удовлетворяют однородной системе уравнений Максвелла. Напомним, что на S_1 задано E_t , а на S_2 – H_t . Следовательно, \vec{E}_1 и \vec{E}_2 имеют совпадающие тангенциальные компоненты на S_1 , а \vec{H}_1 и \vec{H}_2 – на S_2 . При этих условиях на S_1 равна нулю тангенциальная компонента \vec{E} , а на S_2 – тангенциальная компонента \vec{H} . Поэтому для объема V имеет место равенство

$$P + 2j\omega(W_H - W_E) = 0,$$

так как на всей поверхности S либо $E_t = 0$, либо $H_t = 0$. Из полученного равенства следует, что

$$P = 0, \quad W_H - W_E = 0.$$

Первое равенство дает

$$\int_V \sigma |\vec{E}_2 - \vec{E}_1|^2 dV = 0.$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно, из этого равенства следует, что в любой точке внутри V

$$\sigma \cdot |\vec{E}_2 - \vec{E}_1|^2 = 0.$$

Если $\sigma \neq 0$, то из этого следует

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = 0.$$

Далее

$$W_H - W_E = 0.$$

Но так как $W_E = 0$, то и $W_H = 0$, откуда следует, что

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = 0.$$

Теорема единственности справедлива также в предположении, что потери отличны от нуля лишь в некоторой части объема V .

1.6. Решения уравнений Максвелла

Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}$$

решаются путем исключения \vec{E} или \vec{H} .

Например, из первого уравнения найдем \vec{H} :

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \text{rot } \vec{E}$$

и подставим во второе уравнение (при $\mu = \text{const}$):

$$-\text{rot rot } \vec{E} = -\omega^2\varepsilon\mu\vec{E} + j\omega\mu\vec{J}.$$

Обычно обозначают

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu.$$

Для составляющих \vec{E} в декартовых координатах имеет место тождество

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta\vec{E},$$

где $\Delta\vec{E}$ – вектор, декартовы составляющие которого равны ΔE_x , ΔE_y , ΔE_z .

Подставляя и учитывая, что при $\varepsilon = \text{const}$, $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$, получим

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\varepsilon} + j\omega\mu\vec{J}.$$

Из уравнения непрерывности

$$j\omega\rho + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

следует

$$\rho = -\frac{1}{j\omega} \operatorname{div} \vec{J}.$$

Подставляя в приведенное выше уравнение для \vec{E} , получим уравнение

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2) \vec{J}.$$

Решение уравнения с правой частью затруднительно, поэтому таким уравнением пользуются лишь для областей, где $\vec{J} = 0$. В этой области уравнение приобретает вид

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0.$$

Данное уравнение называют уравнением Гельмгольца.

После того как найдено поле \vec{E} , магнитное поле \vec{H} может быть найдено с помощью уравнений Максвелла.

Аналогично, находя \vec{E} из второго уравнения Максвелла и подставляя в первое, получим (при $\varepsilon = \text{const}$)

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J}$$

и

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \omega^2 \mu \varepsilon \vec{H} + \operatorname{rot} \vec{J}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H} \quad (\operatorname{div} \vec{H} = 0),$$

получим

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{J}.$$

В области, где $\vec{J} \equiv 0$, уравнение имеет тот же вид, что и уравнение для \vec{E} :

$$\Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

Иногда для решения уравнений Максвелла используют вспомогательные функции – векторный и скалярный потенциалы. Например, введем вектор \vec{A} таким образом, чтобы

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{или} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}.$$

Подставим это в первое уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \text{rot } \vec{A} \quad \text{или} \quad \text{rot}(\vec{E} + j\omega \cdot \vec{A}) = 0,$$

откуда

$$\vec{E} + j\omega \cdot \vec{A} = -\text{grad } \varphi,$$

где φ – скалярный потенциал.

Из этого равенства имеем

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - j\omega \vec{A}.$$

Для нахождения \vec{A} подставим \vec{H} и \vec{E} во второе уравнение:

$$\text{rot rot } \vec{A} = -j\omega \varepsilon \mu \cdot \text{grad } \varphi + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{A} + \mu \vec{J}.$$

Так как

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A},$$

то из предыдущего уравнения получаем

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \text{grad div } \vec{A} + j\omega \varepsilon \mu \text{grad } \varphi.$$

Соотношением $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}$ векторный потенциал \vec{A} еще не определен однозначно, так как к нему можно прибавить градиент произвольного скаляра. В частности, можно выбрать \vec{A} так (калибровка), чтобы

$$\text{div } \vec{A} + j\omega \varepsilon \mu \varphi = 0.$$

Тогда уравнение для \vec{A} примет вид

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}.$$

Такое упрощение имеет место только в декартовых координатах. Особенно упрощается решение задачи в том случае, когда по каким-либо соображениям заранее ясно, что \vec{A} имеет лишь одну компоненту (декартову).

Соотношение калибровки позволяет выразить φ через \vec{A} :

$$\varphi = \frac{j}{\omega \varepsilon \mu} \operatorname{div} \vec{A}.$$

Подставляя это в выражение для \vec{E} , получим

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega \varepsilon \mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} + k^2) \vec{A},$$

иными словами, как \vec{E} , так и \vec{H} могут быть выражены через векторный потенциал \vec{A} .

Легко показать, что скалярный потенциал φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

В некоторых случаях применяется кулоновская калибровка

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Тогда \vec{A} удовлетворяет уравнению

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + j\omega \varepsilon \mu \cdot \operatorname{grad} \varphi,$$

а φ удовлетворяет уравнению Пуассона, т.е. это – статический потенциал.

Положим

$$\vec{A} = j\omega \varepsilon \mu \vec{\Pi},$$

где $\vec{\Pi}$ – вектор Герца, функция, для синусоидальных полей отличающаяся от векторного потенциала \vec{A} лишь численным множителем. Тогда из соотношения калибровки получим

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}.$$

В точках, где $\vec{J} \neq 0$, $\vec{\Pi}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = -\frac{\vec{J}}{j\omega\varepsilon}.$$

Заметим, что $\frac{\vec{J}}{j\omega}$ имеет размерность поляризации. Действительно,

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}_{\text{стор}},$$

откуда, подставляя это во второе уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon \cdot \vec{E} + j\omega (\vec{P}_{\text{стор}} + \frac{\vec{J}}{j\omega}),$$

где $\vec{P}_{\text{стор}}$ – сторонняя поляризация.

Подставляя выражение в скобках в уравнение для $\vec{\Pi}$, получим

$$\Delta \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = -\left(\frac{\vec{P}_{\text{стор}}}{\varepsilon} + \frac{\vec{J}}{j\omega\varepsilon} \right).$$

Таким образом, источником $\vec{\Pi}$ является поляризация. Отсюда другое название вектора $\vec{\Pi}$ – поляризационный потенциал.

Электрическое и магнитное поля могут быть выражены через вектор $\vec{\Pi}$ (электрический вектор Герца):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \omega^2 \mu \varepsilon \vec{\Pi} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}, \\ \vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{\Pi}. \end{aligned}$$

Однородная система уравнений Максвелла симметрична с точностью до знака относительно \vec{E} и \vec{H} . Поэтому можно получить решение однородной системы, полагая (так как $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ при $\vec{J} = 0$)

$$\vec{D} = -\operatorname{rot} \vec{A}'.$$

Аналогично предыдущему можно получить

$$\vec{H} = -j\omega\vec{A}' - \text{grad } \varphi', \quad \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \vec{A}',$$

причем \vec{A}' и φ' удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta\vec{A}' + k^2\vec{A}' &= 0, \\ \Delta\varphi' + k^2\varphi' &= 0, \\ \text{div } \vec{A}' + j\omega\mu\varepsilon \cdot \varphi' &= 0. \end{aligned}$$

По аналогии с $\vec{\Pi}$ можно ввести магнитный вектор Герца с помощью соотношений

$$\vec{A}' = j\omega\mu\varepsilon \vec{\Pi}', \quad \varphi' = \text{div } \vec{\Pi}',$$

причем $\vec{\Pi}'$ удовлетворяет уравнению

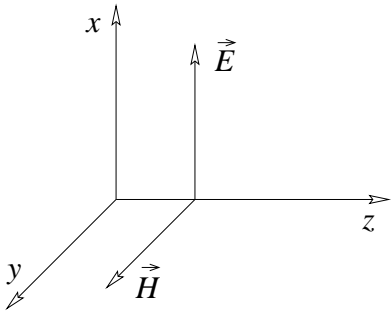
$$\Delta\vec{\Pi}' + k^2\vec{\Pi}' = 0.$$

Через векторы Герца общее решение уравнений Максвелла записывается в виде суммы

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \text{rot } \vec{\Pi}' + (\text{grad div} + k^2) \vec{\Pi}, \\ \vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot \text{rot } \vec{\Pi}' + (\text{grad div} + k^2) \vec{\Pi}'. \end{aligned}$$

Заметим, что потенциалы и векторы Герца удовлетворяют уравнениям, куда входит лапласиан. Выпишем его выражения в декартовых и цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$



Простейшим решением уравнений Максвелла в однородной изотропной среде является плоская волна. Например, плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z , поляризованная в плоскости xOz (см. рис.), может быть записана в виде

$$\begin{aligned} E_x &= A \cdot e^{-jkz} + B \cdot e^{jkz}, \\ E_y &= 0, \\ E_z &= 0, \\ H_x &= 0, \\ H_y &= A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot e^{-jkz} - B \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot e^{jkz}, \\ H_z &= 0, \end{aligned}$$

где $k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon}$, $H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}$.

Решение здесь записано в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях со скоростью $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в одном направлении. Для нее

$$\begin{aligned} E_x &= A \cdot e^{-jkz}, \\ H_y &= A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot e^{-jkz}. \end{aligned}$$

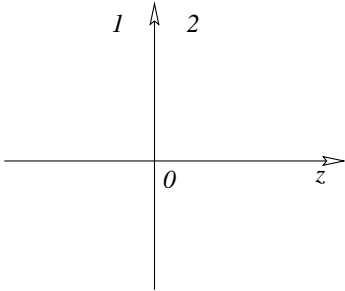
Отношение

$$\zeta = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

зависит только от параметров среды. Эту величину называют волновым сопротивлением среды. Для вещественных ε и μ амплитуда поля

при распространении остается неизменной. Если ε или μ имеют мнимую составляющую, то вследствие потерь волна затухает в направлении распространения.

Рассмотрим случай нормального падения волны на плоскую границу между двумя средами.



Слева на границу падает волна единичной амплитуды (см. рис.):

$$E_x^{\text{пад}} = e^{-jk_1 z},$$

$$H_y^{\text{пад}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot e^{-jk_1 z} = \frac{1}{\zeta_1} \cdot e^{-jk_1 z}.$$

Волна частично отражается, так что отраженная волна равна

$$E_x^{\text{отр}} = R \cdot e^{jk_1 z}, \quad H_y^{\text{отр}} = -R \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cdot e^{jk_1 z} = -\frac{R}{\zeta_1} \cdot e^{jk_1 z}.$$

Прошедшая волна равна

$$E_x = T \cdot e^{-jk_2 z}, \quad H_y = T \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cdot e^{-jk_2 z} = \frac{T}{\zeta_2} \cdot e^{-jk_2 z}.$$

В эти соотношения входят неизвестные величины R и T . Граничные условия – непрерывность E_x и H_y – дают возможность найти их. Совмещая границу с плоскостью $z = 0$ и приравнявая E_x и H_y справа и слева, получим

$$1 + R = T, \quad \frac{1}{\zeta_1} (1 - R) = \frac{1}{\zeta_2} T.$$

Из этих двух уравнений можно найти R и T :

$$R = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1},$$

$$T = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1}.$$

Если $\zeta_2 \rightarrow 0$, то $|R| \rightarrow 1$, а $|I| \rightarrow 0$, т.е. волна полностью отражается. Этот случай является предельным, в частности, если вторая среда представляет собой металл с очень большой проводимостью. В последнем случае можно считать, что $\mu_1 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, а $\varepsilon_2 \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$, так как проводимость металла много больше ε_0 . Тогда

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma}}.$$

Постоянная распространения равна

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = \sqrt{-j\mu_2 \omega \sigma} = (1 - j) \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_2}{2}} = \frac{(1 - j)}{\delta}.$$

Волна при этих условиях записывается в виде

$$e^{-j \frac{z}{\delta}(1-j)} = e^{-\frac{z}{\delta}} \cdot e^{-j \frac{z}{\delta}}.$$

Величина $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$ характеризует скорость убывания амплитуды волны по мере распространения ее в среде 2 (толщина скин-слоя).

Внутри металла имеет место соотношение компонент поля

$$E_x = \zeta_2 \cdot H_x.$$

Данное соотношение справедливо также на границе раздела, по обе стороны от нее, вследствие непрерывности тангенциальных компонент поля.

Теперь предположим, что волна вне проводника падает наклонно на плоскость раздела. В этом случае при переходе в оптически более плотную среду направление распространения приближается к нормали. Если $|\varepsilon \mu| \gg \varepsilon_0 \mu_0$, то направление распространения очень близко к нормали. Поэтому E_x и H_y внутри металла очень близки к тангенциальным компонентам. Поэтому и в этом случае на внешней стороне границы справедливо соотношение

$$E_t = \zeta \cdot H_t$$

для тангенциальных компонент поля. Иначе это соотношение может быть записано следующим образом:

$$\vec{E}_t = \zeta \cdot (\vec{H} \times \vec{n}),$$

где \vec{n} – нормаль внутрь металла.

Данное соотношение называют граничным условием Леонтовича. Оно справедливо при сильном скин-эффекте, когда толщина скин-слоя много меньше всех характерных размеров, в том числе длины волны в свободном пространстве и наименьшего радиуса кривизны поверхности. В этом случае любую волну в малой области можно считать плоской. Толщина скин-слоя должна быть также много меньше толщины пластины металла.

Условие применимости (т.е. сильный скин-эффект) имеет вид

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon_0.$$

Вычислим, например, $\frac{\sigma}{\omega}$ для меди и приравняем ε_0 . Отсюда найдем предельную частоту:

$$\sigma = 5.7 \cdot 10^7 \frac{\text{Сим}}{\text{м}}, \quad \omega = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{5.7 \cdot 10^7}{10^{-9}} \cdot 36\pi = 6.4 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

$f_{\text{пр}} \approx 10^{18}$ Гц, что соответствует $\lambda = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Однако проводимость уже в инфракрасной области длин волн сильно снижается, так что условие Леонтовича справедливо для длинноволновой инфракрасной области.

Если устремить $\sigma \rightarrow \infty$, то $\zeta \rightarrow 0$, а потому $E_t = 0$. При этом поле внутри такой идеально проводящей среды равно нулю. Так как B_n непрерывна, то $B_n = 0$ (и $H_n = 0$) на внешней стороне границы. Тангенциальная компонента H_t имеет разрыв при переходе через границу, так как поле внутри проводника равно нулю. Поэтому по поверхности идеального проводника текут поверхностные токи, плотность которых равна $K = H_t$ по абсолютной величине. Направление определяется соотношением

$$\vec{K} = \vec{H} \times \vec{n}.$$

Если проводник не является идеальным, то поверхностные токи не могут существовать. Но можно ввести так называемые квазиповерхностные токи, определяемые следующим образом:

$$\vec{K} = \int_0^{\infty} \vec{J} \cdot dz,$$

причем ось z направлена перпендикулярно поверхности металла. В этом случае можно показать, что $H_t = K$ на поверхности. Действительно, внутри металла

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J} \approx \vec{J}.$$

Пусть \vec{H} имеет только y -ю составляющую. Тогда

$$J_x = \text{rot}_x \vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Подставляя J_x в подынтегральное выражение, найдем

$$K_x = \int_0^{\infty} J_x \cdot dz = \int_0^{\infty} -\frac{\partial H_y}{\partial z} dz = -H_y \Big|_0^{\infty} = H_y \Big|_{z=0} = H_t.$$

Таким образом, и в этом случае

$$\vec{K} = \vec{H} \times \vec{n}.$$

Согласно условию Леонтовича

$$\vec{E} = \zeta \cdot \vec{H} \times \vec{n} = \zeta \cdot \vec{K}.$$

Учитывая это соотношение, величину

$$\zeta = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma}} = \frac{1 + j}{\delta\sigma}$$

называют поверхностным сопротивлением. Условие Леонтовича, таким образом, связывает поверхностный ток с тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности.

Активная (вещественная) составляющая поверхностного сопротивления определяет мощность потерь в металле. Мощность потерь в единице поверхности определяется соотношением

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}.$$

Так как

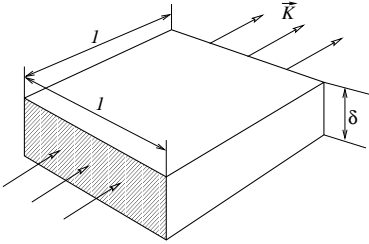
$$\vec{E} = \zeta \cdot (\vec{H} \times \vec{n}),$$

то

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \zeta \left[(\vec{H} \times \vec{n}) \times \vec{H}^* \right] \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \zeta |H|^2$$

или

$$P_1 = \frac{1}{2\delta\sigma} |H_t|^2 = \frac{1}{2\delta\sigma} |K|^2,$$



т.е. мощность может быть выражена через плотность поверхностного тока. Величина $\frac{1}{\delta\sigma}$, имеющая размерность сопротивления, равна сопротивлению пластины в форме квадрата со стороной, равной единице, толщиной δ (см. рис). Иначе говоря, потери таковы, как если бы ток K протекал в слое толщиной δ .

1.8. Электродинамическое подобие

В ряде случаев для исследования электродинамических систем применяется масштабное моделирование. Для этого необходимы критерии подобия.

Геометрически подобные системы можно считать подобными электродинамически, если их можно описывать одинаковыми уравнениями при одинаковых граничных условиях. Так как геометрия границ подобна, но системы отличаются размерами, то уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

следует привести к безразмерной форме.

Для этого все линейные величины запишем в виде

$$l = l_0 \cdot L,$$

где L – безразмерное число, а l_0 – некоторый характерный размер системы. Кроме того, запишем поле в виде

$$\vec{E} = e_0 \cdot \vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{H} = h_0 \cdot \vec{\mathcal{H}},$$

где e_0 и h_0 – размерные величины, а $\vec{\mathcal{E}}$ и $\vec{\mathcal{H}}$ – безразмерные векторы. Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла, получим

$$\text{Rot } \vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu \frac{h_0}{e_0} l_0 \vec{\mathcal{H}}, \quad \text{Rot } \vec{\mathcal{H}} = j\omega\varepsilon \frac{e_0}{h_0} l_0 \vec{\mathcal{E}},$$

где Rot означает дифференцирование по безразмерным координатам. Полученные уравнения полностью характеризуются безразмерными числами – критериями подобия

$$a_1 = \omega\mu l_0 \frac{h_0}{e_0}, \quad a_2 = \omega\varepsilon l_0 \frac{e_0}{h_0},$$

которые для подобных систем должны быть одинаковыми.

Так как величины e_0 и h_0 произвольны, то их отношение можно выбрать так, чтобы $a_2 = 1$. Тогда

$$\frac{h_0}{e_0} = \omega\varepsilon l_0.$$

Подставляя это соотношение в a_1 , получим

$$a_1 = \omega^2 \mu \varepsilon l_0^2 = \text{idem.}$$

Так как

$$\omega^2 \mu \varepsilon = k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2,$$

то критерий подобия будет

$$\frac{l_0}{\lambda} = \text{idem.}$$

Граничное условие Леонтовича имеет вид

$$E_t = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} H_t, \text{ или } E_t = \frac{1 + j}{\delta \sigma} H_t.$$

Приводя это соотношение к безразмерной форме, получим

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{1 + j}{\delta \sigma} \frac{h_0}{e_0} \vec{\mathcal{H}}_t.$$

и подставляя сюда $\frac{h_0}{e_0} = \omega \varepsilon l_0$, получим

$$\vec{\mathcal{E}}_t = (1 + j) \frac{\omega \varepsilon l_0}{\delta \sigma} \vec{\mathcal{H}}_t.$$

Критерий подобия отсюда

$$\frac{\omega \varepsilon l_0}{\delta \sigma} = \text{idem.}$$

Домножая числитель и знаменатель на $\omega \mu_m / \mu$, где μ_m – магнитная проницаемость материала стенок, получим

$$\frac{\mu_m}{\mu} \frac{\omega^2 \mu \varepsilon l_0}{\delta \omega \mu_m \sigma} = \omega^2 \mu \varepsilon l_0^2 \frac{\delta}{l_0} \frac{\mu_m}{\mu}.$$

Так как $a_1 = \omega^2 \mu \varepsilon l_0^2 = \text{idem}$, то второй критерий примет вид

$$\frac{\delta}{l_0} \frac{\mu_m}{\mu} = \text{idem.}$$

Если $\frac{\mu_m}{\mu} = 1$, то второй критерий подобия

$$\frac{\delta}{l_0} = \text{idem.}$$

2. ТЕОРИЯ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

2.1. Поперечные волны в линии передачи

Линией передачи электромагнитных волн обычно называют электродинамическую систему, однородную вдоль некоторой оси z . Найдем поля,

которые могут существовать в такой системе. Для этого используем уравнения Максвелла. При этом предположим, что зависимость от z описывается множителем $e^{-\gamma z}$, т.е. мы ищем решение в виде волн, распространяющихся в направлении оси z .

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E}.\end{aligned}$$

Будем искать волны, аналогичные по свойствам плоским волнам в свободном пространстве. Такие волны характеризуются своей поперечностью, т.е. для них $H_z = 0$, $E_z = 0$. Учитывая это, а также то, что $\partial/\partial z = -\gamma$, запишем уравнения Максвелла для отдельных компонент:

$$\begin{aligned}-j\omega\mu H_x &= \gamma E_y, & j\omega\varepsilon E_x &= \gamma H_y, \\ -j\omega\mu H_y &= -\gamma E_x, & j\omega\varepsilon E_y &= -\gamma H_x, \\ 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}, & 0 &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}.\end{aligned}$$

Из данных уравнений следуют такие пары уравнений:

$$\begin{aligned}\gamma E_y + j\omega\mu H_x &= 0, & \gamma E_x - j\omega\mu H_y &= 0, \\ j\omega\varepsilon E_y + \gamma H_x &= 0, & j\omega\varepsilon E_x - \gamma H_y &= 0.\end{aligned}$$

Это — однородные алгебраические уравнения, определяющие поперечные компоненты электромагнитного поля. Нетривиальные решения существуют, если определитель системы уравнений равен нулю. Приравняв определители обеих систем нулю, получим одно и то же уравнение, определяющее неизвестную пока величину γ :

$$\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon = 0.$$

Из этого уравнения находим γ :

$$\gamma = \pm j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \pm jk.$$

Если μ и ε — вещественны, то γ — чисто мнимая величина; распространение волны в этом случае происходит без затухания.

Заметим, что в данном случае могут быть определены лишь отношения поперечных компонент поля:

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad \frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Заменяя в уравнении $\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y = 0$ H_x и H_y через E_x и E_y из этих соотношений, получим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Второе уравнение может быть удовлетворено, если положить

$$E_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot e^{-\gamma z}, \quad E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot e^{-\gamma z},$$

где ψ – некоторая скалярная функция переменных x и y . Подставляя эти выражения в первое уравнение, получим уравнение для ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Итак, для \vec{E} мы получаем соотношение

$$\vec{E} = -e^{-\gamma z} \cdot \text{grad } \psi,$$

причем ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi = 0,$$

где Δ – лапласиан.

Граничные условия для \vec{E} имеют обычный вид ($E_t = 0$ на поверхности, $\psi = \text{const}$).

Таким образом, можно сделать вывод, что ψ удовлетворяет в поперечном сечении уравнению Лапласа, и, следовательно, электрическое поле совпадает по конфигурации с электростатическим полем. Рассмотрим теперь сечение линии. Оно может быть одно-, дву- или многосвязным. Для односвязного сечения электростатическое поле без продольной составляющей существовать не может. Математически это связано с тем, что функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа (гармоническая функция), постоянная на границе, постоянна внутри всей двумерной области. Поэтому в линиях с односвязным сечением поперечные

волны существовать не могут, в то время как в многосвязных — могут, так как потенциал ψ различных проводников может различаться.

Постоянная распространения поперечных волн (волн ТЕМ) совпадает с постоянной распространения плоских волн в свободном пространстве. Фазовая скорость волн ТЕМ не зависит от частоты: $v_{\Phi} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Распространение возможно для любых частот от 0 до ∞ .

После того как найдено электрическое поле, магнитное поле может быть получено из первого уравнения Максвелла:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Подставляя сюда \vec{E} , выраженное через потенциал и учитывая известное соотношение векторного анализа $\operatorname{rot}(\Phi \cdot \vec{F}) = \Phi \cdot \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} \Phi \times \vec{F}$, получим

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi \cdot e^{-\gamma z}, \quad \vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \vec{z}_0 \times \operatorname{grad} \psi.$$

Здесь \vec{z}_0 — единичный вектор в направлении оси z .

Из полученного соотношения следует, в частности, что векторы \vec{E} и \vec{H} в любой точке перпендикулярны друг другу.

2.2. Напряжение, ток и мощность в ТЕМ-линии

Так как в поперечном сечении двусвязной линии ТЕМ поле — статическое, то величина интеграла

$$U = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

где точки 1 и 2 расположены на одном и другом проводниках в одном сечении, не зависит от пути интегрирования при условии, что этот путь лежит целиком в плоскости поперечного сечения. Естественно назвать эту величину напряжением в линии.

Далее, так как магнитное поле поперечно, токи в проводниках чисто продольны. Нетрудно показать, что интеграл

$$I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

по контуру, охватывающему внутренний проводник и лежащему в плоскости поперечного сечения, равен полному току во внутреннем проводнике и не зависит от выбора этого контура. Нетрудно также показать, что ток во внешнем проводнике равен току во внутреннем проводнике с обратным знаком; поэтому можно однозначно ввести ток I в линии.

Итак, в ТЕМ-линии можно однозначно ввести такие понятия, как напряжение и ток, которые имеют, конечно, более узкий смысл, чем в теории цепей, так как интеграл берется обязательно по контуру, лежащему в поперечном сечении. Напряжения и токи в различных сечениях для бегущей волны при отсутствии потерь отличаются только фазой:

$$U = U_0 \cdot e^{-jkz},$$

$$I = I_0 \cdot e^{-jkz}.$$

Величина отношения

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0}$$

постоянна во всех сечениях.

Покажем, что при отсутствии потерь волновое сопротивление ТЕМ-линии Z_0 – вещественная величина, т.е. U и I имеют одинаковую фазу.

Пусть потенциал

$$\psi = \psi_1 + j\psi_2$$

— комплексная функция. Тогда ψ_1 и ψ_2 должны по отдельности удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi = 0$$

и граничным условиям

$$\psi = \text{const}$$

на периметре поперечного сечения. Поэтому от ψ они отличаются лишь множителем, и в качестве решения можно принять, например, вещественную функцию ψ_1 или ψ_2 . Отсюда следует, что во всех точках данного сечения z вектор $\vec{E} = -\text{grad} \psi \cdot e^{-jkz}$ имеет одну и ту же фазу. Так как

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \frac{E_y}{H_x} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

то вектор \vec{H} также во всех точках сечения z имеет ту же фазу, что и вектор \vec{E} . Так как напряжение U и ток I выражаются через интегралы от указанных векторов, то U и I находятся в сечении в одной фазе. Поэтому $U/I = Z_0$ – вещественная величина.

Найдем некоторые энергетические соотношения для волн в линии ТЕМ. Для этого вспомним, что

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y, \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_x.$$

Отсюда

$$H_x^2 + H_y^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} (E_x^2 + E_y^2) = \frac{\varepsilon}{\mu} E^2.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2},$$

то есть плотности энергии электрического и магнитного полей в бегущей ТЕМ-волне равны в любой точке. Запасы электрической и магнитной энергии в бегущей волне на единицу длины линии также равны.

Для ТЕМ-линии можно ввести понятия погонных емкости C_1 и индуктивности L_1 с помощью соотношений

$$2W_e = \frac{1}{2} C_1 |U|^2,$$

$$2W_h = \frac{1}{2} L_1 |I|^2,$$

где W_e и W_h – средние запасы электрической и магнитной энергий на единицу длины линии. Учитывая, что $W_h = W_e$, получим

$$C_1 |U|^2 = L_1 |I|^2,$$

откуда

$$\frac{U}{I} = Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Найдем теперь мощность волны, распространяющейся в ТЕМ-линии:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 dS,$$

т.е. интеграл вектора Пойнтинга по сечению линии S . Имеем

$$(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_x \vec{E}_x^* + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_y \vec{E}_y^* = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2.$$

Подставляя это в подынтегральное выражение, получим

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_S |E|^2 dS = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \int_S \frac{\varepsilon E^2}{2} dS = \\ &= 2vW_e = 2vW_h = v(W_e + W_h) = vW, \end{aligned}$$

где W – средний запас энергии на единицу длины линии, v – скорость распространения волн в линии.

Далее будет показано, что скорость распространения может быть выражена через погонные параметры:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Подставляя это в выражение для мощности, получим

$$P = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot \frac{1}{2} C_1 |U|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} |U|^2 = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{Z_0},$$

или

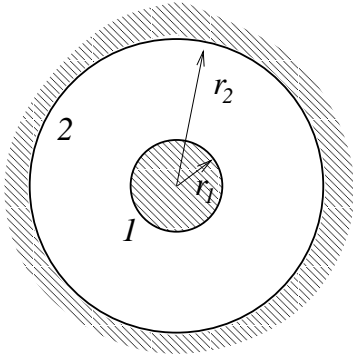
$$P = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \cdot \frac{1}{2} L_1 |I|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} |I|^2 = \frac{1}{2} |I|^2 Z_0.$$

Третье выражение для мощности бегущей волны имеет вид

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U \cdot I^*.$$

2.3. Коаксиальная линия

Одной из наиболее распространенных линий ТЕМ является коаксиальная линия, представляющая собой два коаксиально расположенных проводящих цилиндра (см. рис.).



Решение электростатической задачи для такой системы известно:

$$\psi = \frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2},$$

где U – разность потенциалов между цилиндрами. Отсюда

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{U}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \frac{1}{r} = \frac{U/r}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

$$H_\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{U/r}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Ток в проводнике равен

$$I = 2\pi r_1 \cdot H_{r=r_1} = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Отсюда можно найти волновое сопротивление:

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ Ом.}$$

Если линия ничем не заполнена, то

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 60 \ln \frac{r_2}{r_1} = 138 \lg \frac{r_2}{r_1} \text{ Ом.}$$

Для определения погонной емкости и индуктивности можно использовать следующий прием. Имеем:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \text{ Ом}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

Из этих соотношений получаем

$$C_1 = \frac{1}{v Z_0} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad L_1 = \frac{Z_0}{v} \frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{м}}.$$

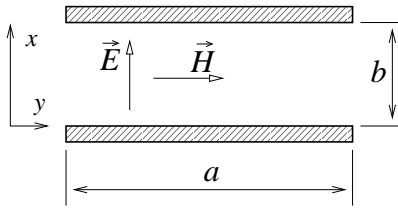
Если сюда подставить выражения для v и Z_0 , то получим

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad L_1 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\Gamma_{\text{н}}}{\text{м}}.$$

Следует отметить, что поперечная волна, строго говоря, существует в коаксиальной линии лишь при условии, что линия в сечении однородно заполнена. При частичном заполнении появляются продольные компоненты полей, в связи с чем появляется дисперсия и другие явления.

2.4. Двухпластинчатая линия

Двухпластинчатая линия имеет сечение, представленное на рис.



Если размеры линии в сечении малы по сравнению с длиной волны, то в линии может распространяться только ТЕМ-волна. Пусть $a \gg b$. Тогда поле между пластинами можно приближенно считать однородным. Напряжение между пластинами равно

$$U = b \cdot E_x;$$

ток равен

$$I = a \cdot H_y,$$

так как поле вне пластин весьма мало.

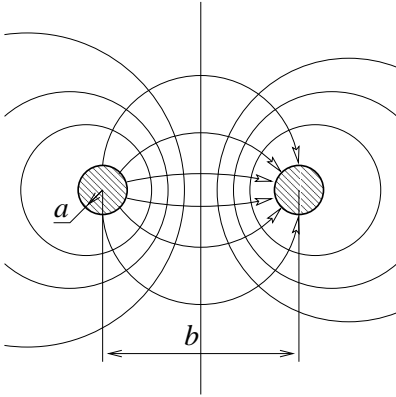
Отсюда волновое сопротивление линии

$$Z_0 = \frac{U}{I} = \frac{b}{a} \frac{E_x}{H_y} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \text{ Ом.}$$

Емкость и индуктивность на единицу длины равны

$$C_1 = \frac{1}{vZ_0} = \varepsilon_0 \frac{a}{b} \frac{\Phi}{\text{М}}, \quad L_1 = \frac{Z_0}{v} = \mu_0 \frac{b}{a} \frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{М}}.$$

2.5. Двухпроводная линия



Сечение двухпроводной линии имеет вид, представленный на рис. Для этой линии электростатика дает величину погонной емкости в виде

$$C_1 = \frac{\pi\varepsilon}{\ln \left[\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1} \right]}.$$

Данная формула при $b \gg a$ упрощается:

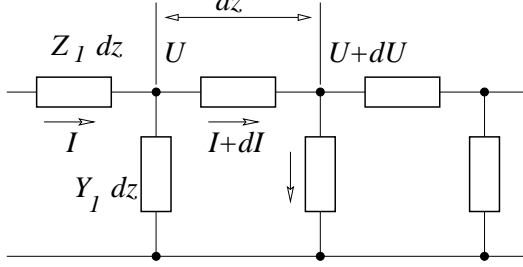
$$C_1 \approx \frac{\pi\varepsilon}{\ln b/a}.$$

Зная емкость, можно найти также волновое сопротивление:

$$Z_0 = \frac{1}{vC_1} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{b}{a} \text{ Ом.}$$

2.6. Телеграфные уравнения

Уравнения распространения волн в линиях ТЕМ можно получить квазистатическим методом с учетом того, что в таких линиях могут быть введены понятия тока и напряжения. Линия может быть представлена в виде цепочки, размеры ячеек которой затем устремляются к нулю (см. рис.).



Для такой цепочки могут быть составлены следующие уравнения:

$$dU = -I Z_1 dz, \quad dI = -U Y_1 dz,$$

откуда

$$\frac{dU}{dz} = -I Z_1, \quad \frac{dI}{dz} = -U Y_1.$$

Исключим из этих уравнений, например, ток I :

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - Z_1 Y_1 U = 0.$$

Обозначая $\gamma^2 = Z_1 Y_1$, получим

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$U = A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z},$$

т.е. представляет собой сумму волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Ток может быть получен из этого выражения с помощью телеграфного уравнения:

$$I = -\frac{1}{Z_1} \frac{dU}{dz} = A \frac{\gamma}{Z_1} e^{-\gamma z} - B \frac{\gamma}{Z_1} e^{\gamma z}.$$

Величина

$$Z_0 = \frac{Z_1}{\gamma} = \frac{Z_1}{\sqrt{Z_1 Y_1}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}$$

является волновым сопротивлением, так как равна отношению напряжения к току в бегущей волне. Если линия не имеет потерь, то

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Y_1 = j\omega C_1,$$

откуда следует, что

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2 L_1 C_1} = j\omega \sqrt{L_1 C_1} = jk.$$

Скорость распространения

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

а волновое сопротивление вещественно:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Напряжение и ток могут быть представлены соответственно в виде суммы и разности прямой и обратной волн

$$U = U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}},$$

$$I = I_{\text{пр}} - I_{\text{обр}} = \frac{1}{Z_0} (U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}}),$$

причем в линии без потерь Z_0 – вещественная величина. Пользуясь этим, можно найти мощность, распространяющуюся в положительном направлении:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U I^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{Z_0} (U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}}) (U_{\text{пр}}^* - U_{\text{обр}}^*) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Z_0} \operatorname{Re}(U_{\text{пр}} U_{\text{пр}}^* - U_{\text{обр}} U_{\text{обр}}^* + U_{\text{пр}} U_{\text{обр}}^* - U_{\text{пр}}^* U_{\text{обр}}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{пр}}|^2}{Z_0} - \frac{1}{2} \frac{|U_{\text{обр}}|^2}{Z_0} = P_{\text{пр}} - P_{\text{обр}}, \end{aligned}$$

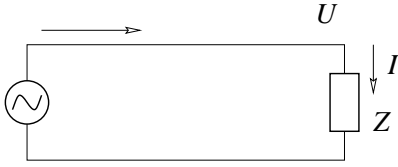
т.е. мощность равна разности мощностей прямой и обратной волн. Это дает основание приписать каждой из волн мощность

$$P = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{Z_0}$$

и рассматривать данные волны как существующие независимо. Это справедливо, лишь если Z_0 – вещественная величина (например, в линии без потерь или с малыми потерями).

2.7. Отражение от нагрузки

Соотношение между прямой и обратной волнами определяется граничными условиями. Пусть в начале линии присоединен генератор, возбуждающий прямую волну (см. рис.).



Если линию ограничить и нагрузить волновым сопротивлением, то очевидно, что в линии будет существовать только бегущая волна. Если же нагрузка отлична от Z_0 , то возникает отраженная волна, так как иначе невозможно удовлетворить граничным условиям.

Действительно, $U/I = Z$ на границе. Подставляя $U = U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}}$ и $I = \frac{1}{Z_0}(U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}})$, получим:

$$Z_0 \cdot \frac{U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}}}{U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}}} = Z$$

или

$$\frac{U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}}}{U_{\text{пр}} - U_{\text{обр}}} = \frac{Z}{Z_0}.$$

Отсюда, обозначая $\frac{U_{\text{обр}}}{U_{\text{пр}}} = \Gamma$ (Γ – коэффициент отражения), получим

$$\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{Z}{Z_0}$$

или, решая относительно коэффициента отражения Γ ,

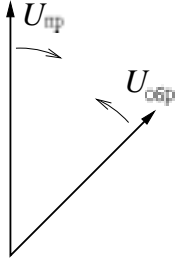
$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}.$$

Рассмотрим распределение напряжения и тока вдоль линии при наличии отраженной волны:

$$U = U_{\text{пр}} e^{-jkz} + U_{\text{обр}} e^{jkz},$$

где $U_{\text{пр}}$ и $U_{\text{обр}}$ – напряжения в начале линии (у генератора) (см. рис.). Данное соотношение можно преобразовать:

$$U = e^{-jkz}(U_{\text{пр}} + U_{\text{обр}} e^{2jkz}).$$

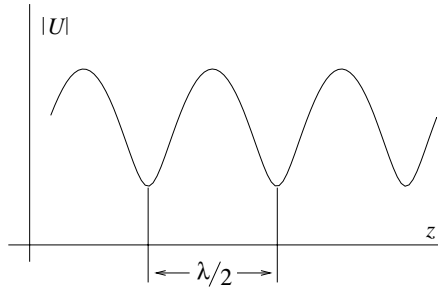


При перемещении вдоль линии от генератора вектор $U_{\text{обр}} e^{2jkz}$ меняет свою фазу. При этом в некоторых точках фазы $U_{\text{пр}}$ и $U_{\text{обр}}$ совпадают, и они складываются. В этих точках напряжение максимально:

$$U_{\text{макс}} = |U_{\text{пр}}| + |U_{\text{обр}}|.$$

Через четверть волны, т.е. через $z = \lambda/4$, напряжения вычитаются:

$$U_{\text{мин}} = |U_{\text{пр}}| - |U_{\text{обр}}|.$$



Такие волны называют стоячими (см. рис.). Величина

$$\rho = \frac{|U_{\text{пр}}| + |U_{\text{обр}}|}{|U_{\text{пр}}| - |U_{\text{обр}}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

называется коэффициентом стоячей волны напряжения (КСВН), характеризующим стоячесть волны. При чисто бегущей волне $\rho = 1$, а при стоячей волне $\rho = \infty$. Нетрудно видеть, что ток в линии со стоячей волной напряжения также образует стоячую волну, но максимум тока соответствует минимуму напряжения, и наоборот.

Предположим, что мы имеем отрезок линии длиной l , нагруженный на конце линии некоторым сопротивлением Z . В произвольном сечении z ток и напряжение могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} U(z) &= Ae^{-jkz} + Be^{jkz}, \\ I(z) &= \frac{1}{Z_0} \cdot (Ae^{-jkz} - Be^{jkz}). \end{aligned}$$

Для определения A и B воспользуемся условиями на конце линии (при $z = l$)

$$\begin{aligned} U(l) &= Ae^{-jkl} + Be^{jkl}, \\ I(l) &= \frac{1}{Z_0} \cdot (Ae^{-jkl} - Be^{jkl}). \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно A и B , получим:

$$\begin{aligned} A &= \frac{U(l) + Z_0 \cdot I(l)}{2} \cdot e^{jkl}, \\ B &= \frac{U(l) - Z_0 \cdot I(l)}{2} \cdot e^{-jkl}. \end{aligned}$$

Полученными результатами можно воспользоваться для определения напряжения и тока в начале линии ($z = 0$):

$$\begin{aligned} U(0) &= A + B = U(l) \cos kl + jZ_0 \cdot I(l) \sin kl, \\ I(0) &= \frac{1}{Z_0} \cdot (A - B) = \frac{j}{Z_0} U(l) \sin kl + I(l) \cos kl. \end{aligned}$$

Данные соотношения позволяют решить задачу о входном сопротивлении отрезка линии, нагруженного сопротивлением $Z(l)$:

$$\begin{aligned} Z(0) &= \frac{U(0)}{I(0)} = \frac{U(l) \cos kl + jZ_0 \cdot I(l) \sin kl}{\frac{j}{Z_0} U(l) \sin kl + I(l) \cos kl} = \\ &= Z_0 \cdot \frac{Z(l) + jZ_0 \operatorname{tg} kl}{Z_0 + jZ(l) \operatorname{tg} kl}. \end{aligned}$$

Итак,

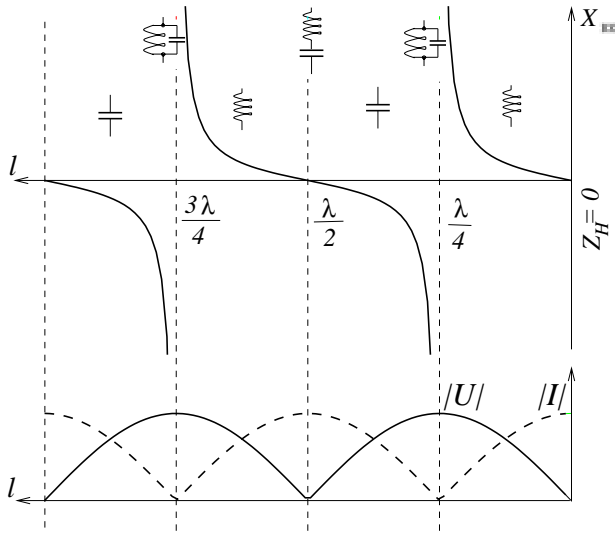
$$Z(0) = Z_0 \frac{Z(l) + jZ_0 \operatorname{tg} kl}{Z_0 + jZ(l) \operatorname{tg} kl}.$$

2.8.1. Короткозамкнутая линия

При коротком замыкании линии $Z(l) = Z_H = 0$. Согласно формуле трансформации входное сопротивление отрезка равно

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \cdot \operatorname{tg} kl = jX_{\text{вх}}, \quad \Gamma_0 = -1.$$

Изменение входного сопротивления представлено на рис.



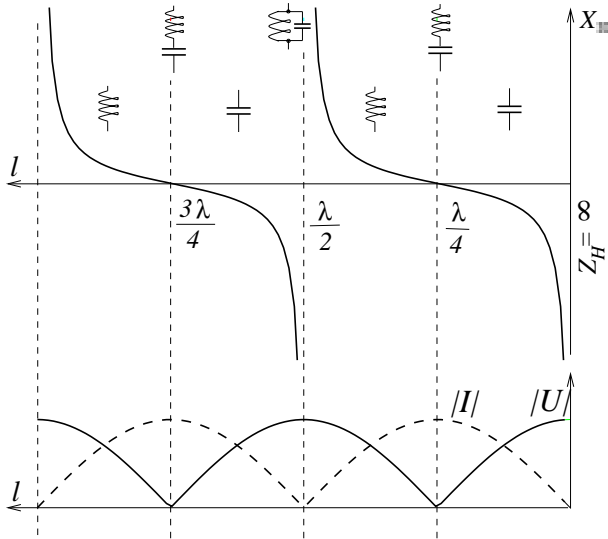
В зависимости от длины отрезка его сопротивление меняется от 0 до ∞ . Поэтому вблизи длины $(2n + 1)\lambda/4$ он может быть уподоблен параллельному резонансному контуру. Максимумы напряжения и тока сдвинуты на $\lambda/4$.

На отрезке длиной $n\lambda/4$ запасы электрической и магнитной энергий равны друг другу. Отрезки линии длиной $\lambda/4$, замкнутые на конце, применяются в качестве четвертьволновых изоляторов.

2.8.2. Разомкнутая линия

Для разомкнутой линии $Z_H = \infty$ (см. рис.). Входное сопротивление отрезка равно

$$Z_{\text{вх}} = -jZ_0 \operatorname{ctg} kl, \quad \Gamma_\infty = +1.$$



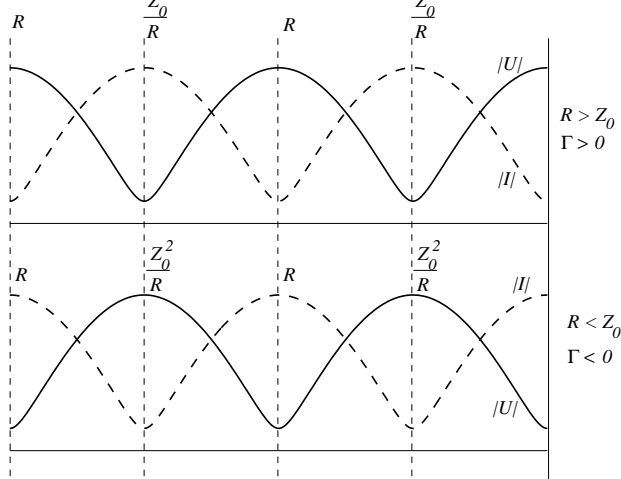
2.8.3. Линия, замкнутая на активное сопротивление

В этом случае $Z_H = R_H$ (см. рис. на след. стр.):

$$Z_{\text{вх}} = Z_0 \cdot \frac{R_H + jZ_0 \operatorname{tg} kl}{Z_0 + jR_H \operatorname{tg} kl}.$$

Здесь при $l = 2n\lambda/4$ $Z_{\text{вх}} = R_H$; при $l = (2n + 1)\lambda/4$ $Z_{\text{вх}} = Z_0^2/R_H$.

Картина стоячих волн зависит от того, больше R_H чем Z_0 или меньше. В точках максимумов и минимумов входное сопротивление является чисто активным и в зависимости от расстояния от нагрузки равно R_H или Z_0^2/R_H .



2.8.4. Линия, замкнутая на реактивное сопротивление

В этом случае $Z_{\text{н}} = jX_{\text{н}}$ (см. рис. на след. стр.). Согласно трансформационной формуле входное сопротивление равно

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \cdot \frac{X_{\text{н}} + Z_0 \operatorname{tg} kl}{Z_0 - X_{\text{н}} \operatorname{tg} kl}.$$

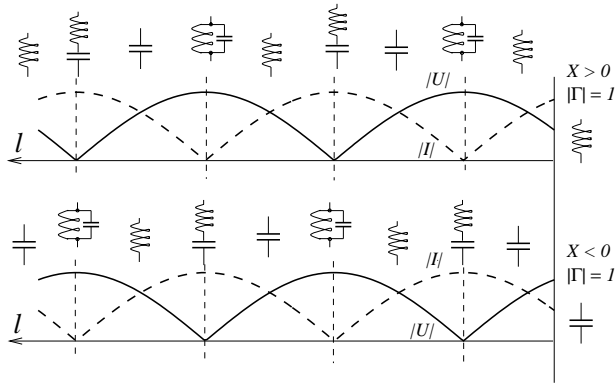
Это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \cdot \frac{\frac{X_{\text{н}}}{Z_0} + \operatorname{tg} kl}{1 - \frac{X_{\text{н}}}{Z_0} \cdot \operatorname{tg} kl} = jZ_0 \operatorname{tg}(kl + \varphi),$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_{\text{н}}}{Z_0}$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, результат получается путем смещения всей картины при коротком замыкании на угол φ . Нетрудно видеть, что в этом случае входное сопротивление обращается в ∞ и 0 в точках, отстоящих друг от друга на $\lambda/4$. Положение ближайшего к нагрузке минимума зависит от знака $X_{\text{н}}$. Если $X_{\text{н}}$ — положительная величина, то ближайший минимум отстоит от нагрузки на расстояние, большее $\lambda/4$, но меньшее $\lambda/2$; если

же X_n отрицательно, то минимум отстоит от нагрузки на расстояние, меньшее $\lambda/4$.



2.9. Трансформация сопротивлений отрезками линии

С точки зрения трансформации сопротивления наибольший интерес представляют полуволновый и четвертьволновый отрезки линии.

2.9.1. Полуволновый отрезок

Для полуволнового отрезка $kl = \pi$, $\operatorname{tg} kl = 0$. Поэтому

$$Z_{\text{вх}} = Z_n.$$

Следовательно, полуволновый отрезок преобразует сопротивление с коэффициентом трансформации 1. Это свойство часто используется в технике.

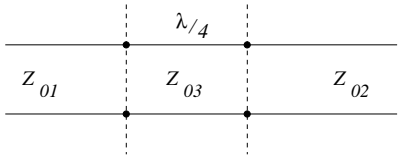
2.9.2. Четвертьволновый отрезок

В этом случае $kl = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} kl = \infty$. Поэтому

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_0^2}{Z_n}.$$

Четвертьволновый отрезок преобразует индуктивность в емкость и наоборот, резонанс – в антирезонанс и обратно.

Четвертьволновый отрезок используется для согласования линий с различным волновым сопротивлением. Такое применение основано на том, что если включить на конце четвертьволнового отрезка активное сопротивление, то входное сопротивление также будет активным. Рассмотрим такой пример.

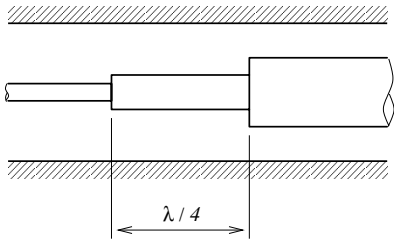


Необходимо согласовать линии с волновыми сопротивлениями Z_{01} и Z_{02} (см. рис.). Найдём волновое сопротивление четвертьволнового отрезка Z_{03} , согласующего эти линии из условия

$$\frac{Z_{03}^2}{Z_{02}} = Z_{01}.$$

Отсюда

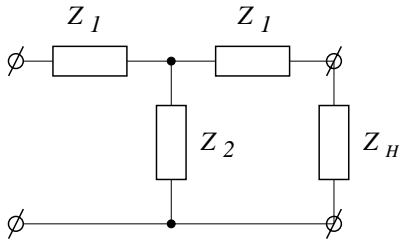
$$Z_{03} = \sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}.$$



Физически согласование можно объяснить тем, что волны, отраженные от двух стыков (см. рис.), во входной линии оказываются в противофазе, и если амплитуды их равны, то они уничтожают друг друга. Отметим, что такое согласование будет иметь место лишь в сравнительно узкой

полосе частот. Для широкополосного согласования применяют многоступенчатые переходы, составленные из четвертьволновых отрезков.

2.10. Представление отрезка линии Т-образным
четырёхполюсником



Отрезок линии представляет собой четырехполюсник. Для расчетов часто бывает удобно его заменить Т-образным четырехполюсником с сосредоточенными параметрами (см. рис.). Для этого вычислим входное сопротивление такого четырехполюсника:

$$Z_{\text{вх}} = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1 + Z_H)}{Z_1 + Z_2 + Z_H} = \frac{Z_H + Z_1 \frac{Z_1 + 2Z_2}{Z_1 + Z_2}}{1 + \frac{Z_H}{Z_1 + Z_2}}.$$

Сравним это выражение с формулой для входного сопротивления отрезка линии, нагруженного на сопротивление Z_H :

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_H + jZ_0 \operatorname{tg} kl}{1 + \frac{j}{Z_0} \cdot Z_H \operatorname{tg} kl}.$$

Данные выражения совпадают, если

$$\begin{aligned} jZ_0 \operatorname{tg} kl &= Z_1 \frac{Z_1 + 2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \\ \frac{j}{Z_0} \operatorname{tg} kl &= \frac{1}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения могут быть решены относительно Z_1 и Z_2 (решение двузначно):

$$Z_1 = jZ_0 \operatorname{tg} kl$$

при $kl \neq (2n + 1)\pi$;

$$Z_2 = -jZ_0 \operatorname{csc} kl$$

$$Z_1 = -jZ_0 \operatorname{ctg} kl$$

при $kl \neq 2n\pi$.

$$Z_2 = jZ_0 \operatorname{csc} kl$$

Следует иметь в виду, что эти соотношения обеспечивают эквивалентность лишь на одной частоте, так как реальные сосредоточенные сопротивления не могут изменяться в зависимости от частоты по указанному закону.

2.11. Номограмма полных сопротивлений (диаграмма Смита)

2.11.1. Преобразование коэффициента отражения отрезком линии

Коэффициент отражения равен

$$\Gamma = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}$$

Если перейти на расстояние l ближе к генератору, то в этом сечении будем иметь

$$U_{\text{отр}}(l) = U_{\text{отр}} e^{-jkl},$$

$$U_{\text{пад}}(l) = U_{\text{пад}} e^{jkl},$$

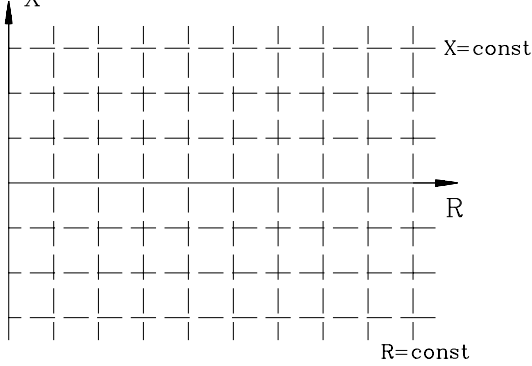
поэтому

$$\Gamma(l) = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}} e^{-2jkl} = \Gamma e^{-2jkl}.$$

Отсюда видно, что $|\Gamma| = \operatorname{const}$, т.е. не зависит от длины отрезка, а фаза отстает на $2kl$.

2.11.2. Номограмма полных сопротивлений

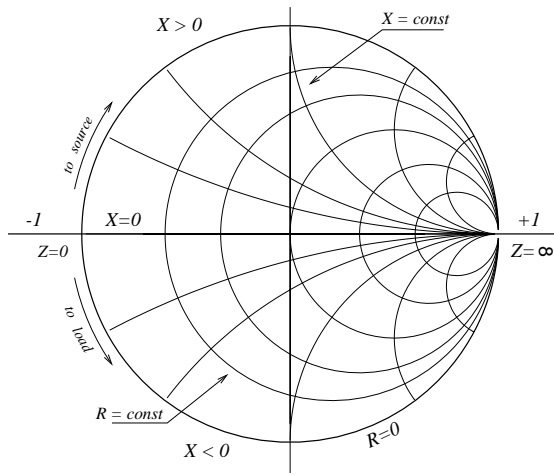
Для пассивных цепей любое комплексное сопротивление может быть представлено точкой, лежащей в правой полуплоскости (см. рис. на след. стр.).



Включение отрезка линии преобразует сопротивление нагрузки в сопротивление входа по приведенной ранее формуле, которая достаточно сложна. С другой стороны, при заданном волновом сопротивлении отрезка линии каждому сопротивлению $Z_{\text{н}}$ соответствует определенный коэффициент отражения Γ :

$$\Gamma = \frac{Z_{\text{н}} - Z_0}{Z_{\text{н}} + Z_0} = \frac{\frac{Z_{\text{н}}}{Z_0} - 1}{\frac{Z_{\text{н}}}{Z_0} + 1} = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Преобразованию сопротивления соответствует преобразование коэффициента отражения. Однако преобразование коэффициента отражения производится по более простым формулам. Поэтому для графических построений выгодно перейти в плоскость коэффициентов отражения по приведенной выше формуле. Так как $|\Gamma| \leq 1$, то коэффициент отражения любой нагрузки может быть изображен точкой внутри окружности единичного радиуса. Соотношение между Γ и $Z_{\text{н}}$ представляет собой дробно-линейное преобразование полуплоскости $R \geq 0$ на круг единичного радиуса. Это преобразование является конформным и преобразует прямые линии в окружности. Эти соображения позволяют построить линии $X = \text{const}$ и $R = \text{const}$ в плоскости коэффициентов отражения.



На приведенной номограмме нанесена сетка линий $X = \text{const}$ и $R = \text{const}$. Пересечение двух таких линий определяет сопротивление нагрузки, отнесенное к Z_0 . В то же время коэффициент отражения по модулю и фазе определяется радиус-вектором точки пересечения. При переходе в другое сечение радиус-вектор поворачивается на угол

$$\varphi = 2kl = 4\pi \frac{l}{\lambda}.$$

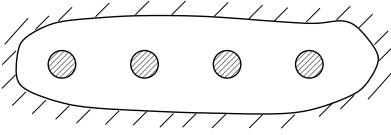
Его конец определяет преобразованное сопротивление.

Такая номограмма или, как ее называют, диаграмма Смита (или круговая диаграмма) широко применяется при расчетах с длинными линиями. Отметим, что эта же диаграмма может быть использована для расчета проводимостей, но для этого диаграмму нужно повернуть на 180° , заменив X на B и R на G . Результат получается в виде проводимости, отнесенной к волновой проводимости Y_0 .

2.12. Многопроводные линии ТЕМ

Кроме линий, состоящих из двух проводников, применяют также линии, состоящие из большего числа проводников – многопроводные линии. В частности, такие линии применяют в направленных ответвителях. Теория многопроводных линий используется также при расчете некоторых

типов замедляющих систем. Пример сечения многопроводной линии приведен на рис.



Распространение волны в многопроводной линии может быть описано с помощью телеграфных уравнений. Для этого вводятся погонные параметры с помощью соотношений (в статическом приближении)

$$Q_i = \sum_k C_{ik} \cdot U_k, \quad U_s = \sum_m P_{sm} \cdot Q_m,$$

где Q_i – линейная плотность заряда на i -м проводнике, U_s – потенциал s -го проводника, C_{ik} – погонные частичные емкости (отрицательные при $i \neq k$), P_{sm} – погонные потенциальные коэффициенты. Приведенные соотношения могут быть записаны в матричной форме:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$, $\mathbf{U} = \{U_s\}$, $\mathbf{C} = \{C_{ik}\}$, $\mathbf{P} = \{P_{sm}\}$ – соответствующие матрицы.

Матрицы \mathbf{C} и \mathbf{P} связаны соотношением

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{1},$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица, т.е. \mathbf{C} и \mathbf{P} – взаимно обратные матрицы: $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$.

С другой стороны, можно ввести также матрицу погонных индуктивностей с помощью соотношения

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} \cdot I_k,$$

где Φ_i – магнитный поток на единицу длины линии, сцепленный с i -м проводником, L_{ik} – погонные взаимные индуктивности. Матричная запись этого соотношения имеет вид

$$\Phi = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I}.$$

Телеграфные уравнения составляются так же, как и в случае двухпроводной линии:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dz} = -j\omega\mathbf{L} \cdot \mathbf{I},$$

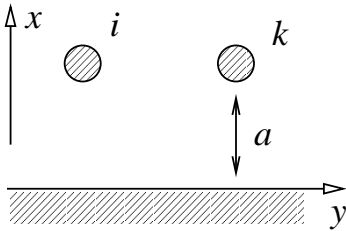
$$\frac{d\mathbf{I}}{dz} = -j\omega\mathbf{C} \cdot \mathbf{U}$$

(запись в матричной форме).

Для решения исключаем ток из первого уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dz^2} = -j\omega\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{dz} = -\omega^2\mathbf{LC} \cdot \mathbf{U},$$

где \mathbf{LC} – матрица (произведение матриц \mathbf{L} и \mathbf{C}).



Вычислим матрицу \mathbf{LC} , найдя связь между матрицами \mathbf{L} и \mathbf{P} . Для этого рассмотрим два проводника с номерами i и k при $i \neq k$ (см. рис.).

Найдем потенциал k -го проводника, если потенциал i -го проводника равен U_i :

$$U_k^i = - \int_0^a E_{ix} \cdot dx,$$

где E_{ix} – x -я компонента электрического поля, создаваемого i -м проводником. Величину E_{ix} можно определить из уравнения Максвелла

$$E_{ix} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot}_x \vec{H}_i,$$

где \vec{H}_i – магнитное поле, создаваемое i -м проводником. Так как $H_z = 0$, то

$$\text{rot}_x \vec{H}_i = - \frac{\partial H_{iy}}{\partial z} \quad \text{и} \quad E_{ix} = - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_{iy}}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$U_k^i = \int_0^a \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial H_{iy}}{\partial z} dx = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^a H_{iy} dx.$$

Но $-\mu \int H_{iy} dx = \Phi_k^i$ – поток, создаваемый i -м проводником, охватывающий k -й проводник. Этот поток $\Phi_k^i = L_{ki} I_i$, поэтому

$$U_k^i = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} L_{ki} \frac{\partial I_i}{\partial z}.$$

Производную $\frac{\partial I_i}{\partial z}$ можно вычислить с помощью уравнения непрерывности, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial I_i}{\partial z} = -j\omega Q_i.$$

Подставляя это в выражение для U_k^i , получим

$$U_k^i = -\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu} L_{ki} \cdot (-j\omega Q_i) = \frac{L_{ki}}{\varepsilon\mu} \cdot Q_i.$$

Величина $\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$, где v – скорость распространения поперечных волн в линии. Итак, имеем

$$U_k^i = v^2 \cdot L_{ki} \cdot Q_i.$$

Сравнивая с определением элементов матрицы \mathbf{P} , находим

$$P_{ki} = v^2 \cdot L_{ki} \quad \text{при } i \neq k.$$

Аналогичные рассуждения приводят к такому же соотношению при $i = k$. Поэтому

$$\mathbf{P} = v^2 \mathbf{L}, \quad \mathbf{L} = \frac{\mathbf{P}}{v^2}.$$

Подставляя это выражение в полученное выше дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dz^2} = - \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \mathbf{PC} \cdot \mathbf{U} = -k^2 \mathbf{U}.$$

Уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dz^2} + k^2 \mathbf{U} = 0.$$

Это уравнение представляет собой краткую запись последовательности уравнений для U_i , причем в каждое уравнение входит лишь один потенциал U_i , т.е. переменные разделяются. Решение этих уравнений может быть записано в матричной форме

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}e^{-jkz} + \mathbf{B}e^{jkz},$$

где \mathbf{U} , \mathbf{A} , \mathbf{B} – соответствующие матрицы. Для тока из предыдущих уравнений имеем

$$\mathbf{I} = - \frac{1}{j\omega} \mathbf{L}^{-1} \frac{d\mathbf{U}}{dz} = \mathbf{Z}_0^{-1} (\mathbf{A}e^{-jkz} - \mathbf{B}e^{jkz})$$

или

$$\mathbf{Z}_0 \mathbf{I} = \mathbf{A}e^{-jkz} - \mathbf{B}e^{jkz}.$$

Здесь введено обозначение $\frac{\omega}{k} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{Z}_0$ (Z_0 – вещественная матрица, имеющая смысл матрицы волнового сопротивления).

Воспользуемся полученными соотношениями для выяснения, как преобразуются напряжение и ток в многопроводной линии.

Полагая $z = 0$, найдем напряжения и ток в начале линии:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(0) &= \mathbf{A} + \mathbf{B}, \\ \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}(0) &= \mathbf{A} - \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Для определения \mathbf{A} и \mathbf{B} запишем условия в конце линии, т.е. при $z = l$:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(l) &= \mathbf{A}e^{-jkl} + \mathbf{B}e^{jkl}, \\ \mathbf{Z}_0\mathbf{I}(l) &= \mathbf{A}e^{-jkl} - \mathbf{B}e^{jkl}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{jkl} \frac{\mathbf{U}(l) + \mathbf{Z}_0\mathbf{I}(l)}{2}, \\ \mathbf{B} &= e^{-jkl} \frac{\mathbf{U}(l) - \mathbf{Z}_0\mathbf{I}(l)}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя \mathbf{A} и \mathbf{B} в выражения для $\mathbf{U}(0)$ и $\mathbf{I}(0)$, находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(0) &= \mathbf{U}(l) \cos kl + j\mathbf{Z}_0\mathbf{I}(l) \sin kl, \\ \mathbf{I}(0) &= j\mathbf{Z}_0^{-1}\mathbf{U}(l) \sin kl + \mathbf{I}(l) \cos kl. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уравнения, аналогичные уравнениям для двухпроводной линии, записанные в матричной форме. Отметим, что в этих уравнениях разделение переменных уже не имеет места в отличие от исходного дифференциального уравнения.

Нагрузка многопроводной линии определяется матрицей нагрузочного сопротивления, связывающего между собой потенциалы проводов на выходе и токи, протекающие в этих проводах.

2.13. Линия с малыми потерями

Наиболее просто выяснить влияние малых потерь на распространение волн с помощью телеграфных уравнений. Постоянная распространения в этом случае будет равна

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{Z_1 \cdot Y_1} = \sqrt{(j\omega L_1 + R_1)(j\omega C_1 + G_1)} = \\ &= \sqrt{-\omega^2 L_1 C_1 \cdot \left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1}\right) \left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1}\right)} = \\ &= j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1}\right) \left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1}\right)}. \end{aligned}$$

Если $R_1 \ll \omega L_1$ и $G_1 \ll \omega C_1$, то приближенно

$$\begin{aligned} \gamma &\approx j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left\{ 1 + \frac{1}{2j\omega} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{G_1}{C_1} \right) + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right\} = \\ &= jk \left\{ 1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{Z_0} + \frac{G_1}{Y_0} \right) = jk' + \alpha, \end{aligned}$$

где $Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$, $Y_0 = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ – волновые сопротивление и проводимость линии без потерь.

Здесь скорость распространения ($v = \omega/k'$) зависит от частоты, т.е. имеет место дисперсия. Кроме того, появляется затухание, соответствующее вещественной части постоянной распространения γ :

$$U = U_0 e^{-\alpha z} \cdot e^{-jk'z}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{Z_0} + \frac{G_1}{Y_0} \right).$$

Наличие дисперсии приводит к появлению искажений импульсов в линии. Эти искажения могут быть особенно сильными в длинных линиях. Искажений нет в частном случае, когда

$$\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1}.$$

В этом случае

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_1 C_1} \left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1} \right) = jk + \frac{R_1}{Z_0}.$$

Так как в телеграфных кабелях преобладают потери за счет сопротивления проводов (R_1), то для уменьшения искажений на низких частотах увеличивают индуктивность, включая через некоторые интервалы катушки (катушки Пуппина). Если потери обусловлены только сопротивлением проводов, то при $R_1 \ll \omega L_1$ затухание равно

$$\alpha = \frac{R_1}{2Z_0}.$$

Величина R_1 определяется как сумма сопротивления прямого и обратного проводов с учетом толщины скин-слоя, по которому протекает ток.

Наличие потерь приводит к тому, что волновое сопротивление становится комплексным. Исключение составляет лишь линия без искажений, для которой выполняется соотношение $\frac{R_1}{L_1} = \frac{G_1}{C_1}$. Нетрудно видеть, что в этом случае волновое сопротивление равно $\sqrt{L_1/C_1}$, т.е. волновому сопротивлению линии без потерь.

Пример. Расчет затухания коаксиального кабеля.

Диаметры проводников: $d_1=0.6$ мм, $d_2=4.0$ мм;

Волновое сопротивление $Z_0=75$ Ом;

Частота $f=1000$ МГц.

Отсюда сопротивление внутреннего проводника $R'_1 = 0.0175 \cdot \frac{l}{S}$, где l – длина (1 м); S – площадь сечения внутреннего проводника, мм² ($S = \pi d_1 \cdot \delta$, δ – толщина скин-слоя).

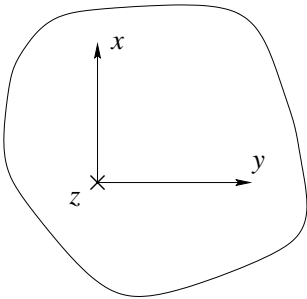
Толщина скин-слоя в меди для частоты $f=1000$ МГц равна $2.1 \cdot 10^{-3}$ мм.

В результате получаем: $R'_1 \approx 4.46$ Ом/м, и аналогично сопротивление наружного проводника $R''_1 \approx 0.65$ Ом/м, итого $R_1 \approx 5.1$ Ом/м.

Отсюда $\alpha = \frac{5.1}{2 \cdot 75} = 0.031$ непер/м = $0.031 \cdot 8.69 = 0.29$ дБ/м.

3. ВОЛНОВОДЫ

3.1. Выражение векторов поля через потенциальные функции. E- и H-моды



Кроме рассмотренных ранее чисто поперечных волн в линиях передачи могут при некоторых условиях распространяться волны, имеющие продольную составляющую электрического или магнитного полей. В частности, в линиях с односвязным сечением (см. рис.) могут существовать только такие волны.

В линиях с дву- или многосвязным сечением кроме поперечных волн могут распространяться также волны с продольными составляющими поля, если частота превосходит некоторое критическое значение.

Электромагнитное поле в волноводе удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}.$$

Исключая поочередно электрическое и магнитное поля, можно перейти к уравнениям Гельмгольца для каждого из полей:

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0, \quad \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0.$$

Так как E_z и H_z – декартовы составляющие, то для них уравнения Гельмгольца дают

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z &= 0, \\ \Delta_{\perp} H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z &= 0, \end{aligned}$$

где Δ_{\perp} – лапласиан, действующий лишь на поперечные координаты. Уравнения можно решать разделением переменных:

$$E_z = E_{\perp}(x, y) \cdot E_{\parallel}(z), \quad H_z = H_{\perp}(x, y) \cdot H_{\parallel}(z).$$

Подставляя и разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{\parallel}}{dz^2} - \gamma^2 E_{\parallel} &= 0, \quad \Delta_{\perp} E_{\perp} + (k^2 + \gamma^2) E_{\perp} = 0, \\ \frac{d^2 H_{\parallel}}{dz^2} - \gamma^2 H_{\parallel} &= 0, \quad \Delta_{\perp} H_{\perp} + (k^2 + \gamma^2) H_{\perp} = 0, \end{aligned}$$

где γ – постоянная разделения.

Из этих уравнений следует, что зависимость поля от z экспоненциальна: $e^{\pm\gamma z}$. При этом $\gamma \neq jk$, так как в случае равенства поперечное поле должно быть статическим, как это следует из полученных уравнений.

Кроме уравнений Максвелла, поля удовлетворяют граничным условиям, которые для идеально проводящих стенок имеют вид

$$\vec{E}_t = 0, \quad H_n = 0,$$

где E_t – тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности металла, H_n – нормальная составляющая магнитного поля на этой поверхности.

Найдем решения уравнений Максвелла. Для этого запишем их для декартовых составляющих векторов поля, учитывая экспоненциальную зависимость их от z (дифференцированию по z соответствует умножение на $-\gamma$):

$$\begin{aligned} -j\omega\mu H_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y, \\ -j\omega\mu H_y &= -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ -j\omega\mu H_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}; \\ j\omega\varepsilon E_x &= \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y, \\ j\omega\varepsilon E_y &= -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ j\omega\varepsilon E_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Записанные уравнения позволяют выразить поперечные компоненты E_x , E_y , H_x , H_y через продольные E_z , H_z . Для этого подставим в первое уравнение E_y , взятое из пятого. Тогда получим

$$(\omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2)H_x = j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

или (обозначая $\omega^2\mu\varepsilon = k^2$)

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x &= -\frac{j\omega\mu}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\gamma}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\gamma}{k^2 + \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}.$$

Составляющие E_z и H_z должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned}\Delta E_z + k^2 E_z &= 0, \\ \Delta H_z + k^2 H_z &= 0,\end{aligned}$$

или, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_z}{dx^2} + \frac{d^2 E_z}{dy^2} + (k^2 + \gamma^2) E_z &= 0, \\ \frac{d^2 H_z}{dx^2} + \frac{d^2 H_z}{dy^2} + (k^2 + \gamma^2) H_z &= 0.\end{aligned}$$

Данные уравнения могут быть получены и непосредственно из третьего и шестого из вышенаписанных уравнений, если подставить в них E_x , E_y , H_x и H_y .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}E_z &= (k^2 + \gamma^2) \cdot \phi(x, y) \cdot e^{-\gamma z}, \\ H_z &= (k^2 + \gamma^2) \cdot \psi(x, y) \cdot e^{-\gamma z},\end{aligned}$$

где $\phi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – некоторые скалярные функции поперечных переменных. Эти функции должны, очевидно, удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y} \phi + (k^2 + \gamma^2) \phi &= 0, \\ \Delta_{x,y} \psi + (k^2 + \gamma^2) \psi &= 0,\end{aligned}$$

или, обозначая $k^2 + \gamma^2 = g^2$,

$$\begin{aligned}\Delta_{x,y} \phi + g^2 \phi &= 0, \\ \Delta_{x,y} \psi + g^2 \psi &= 0.\end{aligned}$$

Составляющие полей выражаются через функции ϕ и ψ :

$$\begin{aligned}
H_x &= \left(j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \cdot e^{-\gamma z}, \\
H_y &= \left(-j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial x} - \gamma \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \cdot e^{-\gamma z}, \\
E_x &= \left(-j\omega\mu \frac{\partial\psi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \cdot e^{-\gamma z}, \\
E_y &= \left(j\omega\mu \frac{\partial\psi}{\partial x} - \gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \cdot e^{-\gamma z},
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot \text{rot}(\phi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) + \text{grad div}(\psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) + k^2\psi \cdot e^{-\gamma z} \cdot \vec{z}_0, \\
\vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \text{rot}(\psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) + \text{grad div}(\phi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) + k^2\phi \cdot e^{-\gamma z} \cdot \vec{z}_0,
\end{aligned}$$

где \vec{z}_0 – единичный вектор в направлении оси z .

Действительно, если исходить из известных векторных тождеств

$$\begin{aligned}
\text{grad}(\Psi \cdot \Phi) &= \Phi \cdot \text{grad} \Psi + \Psi \cdot \text{grad} \Phi, \\
\text{rot}(\Phi \cdot \vec{F}) &= \Phi \cdot \text{rot} \vec{F} + \text{grad} \Phi \times \vec{F}, \\
\text{div}(\Phi \cdot \vec{F}) &= \Phi \cdot \text{div} \vec{F} + \text{grad} \Phi \cdot \vec{F},
\end{aligned}$$

можно получить

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\phi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) &= e^{-\gamma z} \cdot \text{grad} \phi \times \vec{z}_0, \\
\text{grad div}(\psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}) &= -\gamma e^{-\gamma z} \text{grad} \psi + \gamma^2 \psi \cdot \vec{z}_0 e^{-\gamma z}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения, получим

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot e^{-\gamma z} \text{grad} \phi \times \vec{z}_0 + (k^2 + \gamma^2) e^{-\gamma z} \psi \cdot \vec{z}_0 - \gamma e^{-\gamma z} \text{grad} \psi, \\
\vec{E} &= -j\omega\mu \cdot e^{-\gamma z} \text{grad} \psi \times \vec{z}_0 + (k^2 + \gamma^2) e^{-\gamma z} \phi \cdot \vec{z}_0 - \gamma e^{-\gamma z} \text{grad} \phi.
\end{aligned}$$

Данные соотношения, если их записать в декартовых составляющих, приводятся к полученным выше.

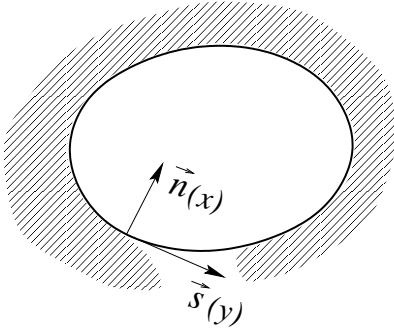
$$\vec{\Pi} = \phi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z} \quad \text{и} \quad \vec{\Pi}' = \psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z} —$$

это векторы Герца.

Таким образом, векторы поля выражаются через электрический и магнитный векторы Герца, имеющие в данном случае только продольные (z) составляющие.

Найдем граничные условия на поверхности для потенциальных функций ϕ и ψ . Для этого необходимо выразить тангенциальную компоненту электрического поля \vec{E}_t и нормальную магнитного поля H_n на поверхности через ϕ и ψ .

Тангенциальную компоненту \vec{E}_t можно разложить на составляющую в направлении оси z и составляющую, лежащую в плоскости сечения, т.е. касательную к контуру поперечного сечения. Обе составляющие должны быть равны нулю. Из равенства $E_z = 0$ на поверхности получаем $\phi = 0$ на контуре сечения C .



Чтобы найти касательную к контуру сечения составляющую \vec{E}_s , введем в произвольной точке контура два орта \vec{s} и \vec{n} , причем \vec{n} направлен внутрь волновода (см. рис.). Тогда по аналогии с выражением для E_y (отождествляя направление y с s , а направление x — с n) получим

$$E_s = j\omega\mu \frac{\partial\psi}{\partial n} - \gamma \frac{\partial\phi}{\partial s}.$$

Так как $\phi = 0$ на C , то для того, чтобы $E_s = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\partial\psi/\partial n = 0$ на контуре C .

Покажем, что эти условия обеспечивают также равенство $H_n = 0$ на C . Для этого запишем выражение для H_n по аналогии с выражением для H_x :

$$H_n = -j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial s} - \gamma \frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Итак, граничные условия для функций ϕ и ψ имеют вид

$$\phi = 0 \quad \text{на } C,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } C,$$

а сами функции удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_{x,y} \phi + g^2 \phi = 0,$$

$$\Delta_{x,y} \psi + g^2 \psi = 0,$$

где $g^2 = k^2 + \gamma^2$.

Задача распадается на две: отдельно для ϕ и ψ . В итоге имеем две системы решений. Для одной поле выражается только через функцию ϕ , при этом отлична от нуля z -компонента электрического поля, для другой поле выражается через ψ -функцию, отлична от нуля z -компонента магнитного поля.

Известно, что такие задачи имеют нетривиальные решения при определенных значениях g^2 – собственных значениях задачи. В общем случае эти значения различны для ϕ и ψ функций. Функции ϕ и ψ , представляющие собой нетривиальные решения указанной выше задачи, называют собственными функциями.

Можно показать, что собственные значения вещественны и положительны. Для этого можно исходить из формулы Грина для произвольных функций ϕ и ψ

$$\int_S (\phi \cdot \Delta \psi + \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \psi) dS = \oint_C \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} dC,$$

где S – область на плоскости, C – контур, ограничивающий эту область.

Заменим ϕ на ψ^* . Тогда

$$\int_S (\psi^* \cdot \Delta \psi + |\text{grad } \psi|^2) dS = \oint_C \psi^* \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} dC = 0$$

вследствие граничных условий. Кроме того, $\Delta \psi = -g^2 \psi$ из уравнения.

Подставляя это в равенство, полученное из формулы Грина, находим

$$g^2 = \frac{\int_S |\text{grad } \psi|^2 dS}{\int_S |\psi|^2 dS},$$

откуда следует, что $g^2 > 0$. Полученная формула позволяет найти собственное значение, если известна соответствующая собственная функция.

Собственные значения образуют возрастающую счетную последовательность положительных чисел, среди которых имеется отличное от нуля наименьшее число: $g_1^2, g_2^2, \dots, g_n^2, \dots$. Эта последовательность не имеет точек сгущения, за исключением ∞ . Каждому собственному значению соответствует одна или больше собственных функций.

Можно показать, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на сечении волновода S :

$$\int_S \psi_n \cdot \psi_m dS = 0, \quad \int_S \phi_n \cdot \phi_m dS = 0, \quad \text{если } g_n^2 \neq g_m^2.$$

Для доказательства воспользуемся второй формулой Грина:

$$\int_S (\phi_n \cdot \Delta \phi_m - \phi_m \cdot \Delta \phi_n) dS = \oint_C (\phi_n \cdot \frac{\partial \phi_m}{\partial n} - \phi_m \cdot \frac{\partial \phi_n}{\partial n}) dC.$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль в силу граничных условий на контуре сечения волновода

$$\int_S (\phi_n \cdot \Delta \phi_m - \phi_m \cdot \Delta \phi_n) dS = 0.$$

Подставляя сюда из уравнений $\Delta \phi_n = -g_n^2 \cdot \phi_n$, $\Delta \phi_m = -g_m^2 \cdot \phi_m$, получим

$$(g_n^2 - g_m^2) \int_S \phi_n \cdot \phi_m dS = 0.$$

Так как по предположению $g_n^2 \neq g_m^2$, то

$$\int_S \phi_n \cdot \phi_m dS = 0.$$

Аналогично доказываем, что

$$\int_S \psi_n \cdot \psi_m dS = 0.$$

В случае вырождения, т.е. когда ϕ_n и ϕ_m соответствуют одному и тому же собственному значению, они могут и не быть ортогональны. Известно, что в этом случае возможен процесс ортогонализации, т.е. можно подобрать такие линейные комбинации из этих функций, которые будут ортогональны друг к другу, оставаясь при этом собственными функциями (соответствующими одному собственному значению).

Постоянная распространения для данной моды γ_n может быть определена, если известно собственное значение g_n^2 :

$$\gamma_n^2 = g_n^2 - k^2, \quad \gamma_n = \pm \sqrt{g_n^2 - k^2}.$$

Распространение без затухания имеет место, если γ_n – мнимая величина, т.е. если выполняется неравенство

$$k^2 > g_n^2.$$

Это условие можно записать иначе:

$$\omega^2 \mu \varepsilon > g_n^2$$

или

$$\omega > \frac{g_n}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \omega_n$$

критическая частота для n -й моды. Если это условие выполняется, то постоянная распространения равна

$$\gamma_n = j\beta_n = j\sqrt{k^2 - g_n^2}.$$

Отсюда можно найти длину волны в волноводе и фазовую скорость. Действительно,

$$\beta_n = \frac{2\pi}{\Lambda_n}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где Λ_n – длина волны в волноводе, λ – длина волны в неограниченном пространстве с параметрами μ, ε .

Подставляя это в выражение для γ_n , получим ($g_n = \frac{z_n}{\lambda_n}$):

$$\frac{1}{\Lambda_n} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}},$$

откуда

$$\Lambda_n = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}}.$$

Фазовая скорость может быть найдена по известной длине волны:

$$v_\Phi = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega \Lambda_n}{2\pi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}} > c.$$

Итак, волны, распространяющиеся в волноводе, могут быть представлены в виде суммы электрических (Е или ТМ, $\psi \equiv 0$) и магнитных (Н или ТЕ, $\phi \equiv 0$) волн. Им соответствуют две системы векторных функций, электрические — $\vec{E}_n^{(e)}$, $\vec{H}_n^{(e)}$ и магнитные — $\vec{E}_n^{(h)}$, $\vec{H}_n^{(h)}$.

Отметим, что векторные функции взаимно ортогональны в том смысле, что

$$\int_S \vec{E}_n \cdot \vec{E}_m dS = 0, \quad \int_S \vec{H}_n \cdot \vec{H}_m dS = 0, \quad \int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_m) \cdot \vec{z}_0 dS = 0$$

при $g_n^2 \neq g_m^2$. Интегралы берутся по сечению волновода.

Данное свойство позволяет рассматривать волны различных мод как независимые, так как благодаря ортогональности энергия и мощность складываются из энергии и мощности отдельных мод.

Запишем выражение для Н-волн через потенциальную функцию ψ :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot e^{-\gamma z} \text{grad } \psi \times \vec{z}_0, \\ \vec{H} &= -\gamma \cdot e^{-\gamma z} \text{grad } \psi + (k^2 + \gamma^2) e^{-\gamma z} \psi \cdot \vec{z}_0. \end{aligned}$$

Поперечные составляющие электрического и магнитного векторов перпендикулярны, что следует из равенства нулю их скалярного произведения

$$\vec{E}_{\text{поп}} \cdot \vec{H}_{\text{поп}} = \text{grad } \psi \cdot (\text{grad } \psi \times \vec{z}_0) = 0.$$

Из приведенных выше формул следует, что поперечные составляющие поля связаны между собой соотношением (для каждой моды)

$$\vec{E}_{\text{поп}} = Z_h \cdot \vec{H}_{\text{поп}} \times \vec{z}_0,$$

где $Z_h = j\omega\mu/\gamma$. Для распространяющихся мод Z_h вещественно:

$$Z_h = \frac{\omega\mu}{\beta} = \mu v_{\phi} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_n^2}}.$$

Для Е-волн поле может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\gamma e^{-\gamma z} \text{grad } \phi + (k^2 + \gamma^2) e^{-\gamma z} \phi \cdot \vec{z}_0, \\ \vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot e^{-\gamma z} \text{grad } \phi \times \vec{z}_0.\end{aligned}$$

Здесь $\vec{E}_{\text{поп}}$ и $\vec{H}_{\text{поп}}$ также перпендикулярны. Кроме того,

$$\vec{E}_{\text{поп}} = Z_e \cdot \vec{H}_{\text{поп}} \times \vec{z}_0,$$

причем $Z_e = \gamma/j\omega\varepsilon$. Для распространяющихся волн Z_e вещественно:

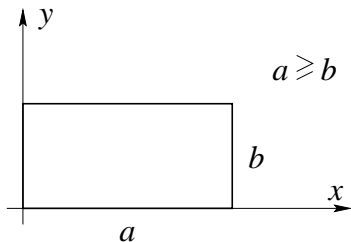
$$Z_e = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{1}{v_{\phi} \cdot \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}}.$$

Ранее было показано, что волна в волноводе может распространяться, если выполняется условие

$$\omega > \omega_n = \frac{g_n}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

причем среди g_n имеется наименьшее, например g_1 . Отсюда следует, что по данному волноводу при заданной частоте может распространяться лишь конечное число мод; это число растет с ростом частоты. В частности, существует интервал частот, в котором в волноводе может распространяться лишь одна мода.

3.2.1. Волны Н-типа



Для Н-волн в прямоугольном волноводе (см. рис.) имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + g^2 \psi = 0$$

при условии на границах $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.

Решение найдем по методу Фурье в виде произведения

$$\psi(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Тогда уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -g^2$$

и переменные разделяются, т.е. уравнение распадается на два:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + g_x^2 X = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + g_y^2 Y = 0,$$

причем $g_x^2 + g_y^2 = g^2$.

Полученные уравнения имеют решения

$$X = A \cos g_x x + B \sin g_x x, \quad Y = C \cos g_y y + D \sin g_y y.$$

На границах имеем: при $x = 0$ $\frac{dX}{dx} = 0$, откуда следует, что

$$B = 0, \quad X = \cos g_x x;$$

при $y = 0$ $\frac{dY}{dy} = 0$, откуда следует, что

$$D = 0, \quad Y = \cos g_y y;$$

при $x = a$ $\frac{dX}{dx} = 0$, т.е. $\sin g_x a = 0$, откуда

$$g_x a = n\pi \quad \text{и} \quad g_x = \frac{n\pi}{a}; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

при $y = b$ $\frac{dY}{dy} = 0$, т.е. $\sin g_y b = 0$, откуда

$$g_y b = m\pi \quad \text{и} \quad g_y = \frac{m\pi}{b}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь находим $\psi(x, y)$:

$$\psi(x, y) = \cos \frac{n\pi}{a} x \cdot \cos \frac{m\pi}{b} y$$

с точностью до произвольного множителя.

Собственные значения g_{nm}^2 равны

$$g_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что индексы n и m не могут одновременно обращаться в нуль, так как в этом случае $\psi = \text{const}$ и все компоненты поля обращаются в нуль.

Отсюда могут быть найдены критические длины волн (для вакуума):

$$\lambda_{nm} = \frac{2\pi}{g_{nm}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}},$$

т.е. критическая длина волны определяется размерами волновода и номером моды.

После того как найдена функция $\psi(x, y)$, можно найти все составляющие поля (без экспоненты $e^{-\gamma z}$):

$$\begin{aligned} H_z &= (k^2 + g^2)\psi(x, y) = \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right] \cos \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y, \\ H_x &= -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{n\pi}{a} \gamma \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y = j\beta \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y, \\ H_y &= -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{m\pi}{b} \gamma \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y = j\beta \frac{m\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \end{aligned}$$

$$E_x = -j\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial y} = j\omega\mu\frac{n\pi}{b}\cos\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y,$$

$$E_y = j\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial x} = -j\omega\mu\frac{n\pi}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y.$$

В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $a > b$.

Рассмотрим структуру полей различных мод. Прежде всего, еще раз напомним, что n и m не могут одновременно принимать нулевые значения. Но одно из этих чисел может быть равно нулю. Нетрудно видеть, что если $a > b$, то наибольшую критическую волну имеет мода H_{10} :

$$\lambda_{10} = 2a.$$

Моду с наибольшей критической волной называют основной для данного волновода. Существует диапазон частот, в котором в данном волноводе может распространяться только основная мода, в отличие от высших мод.

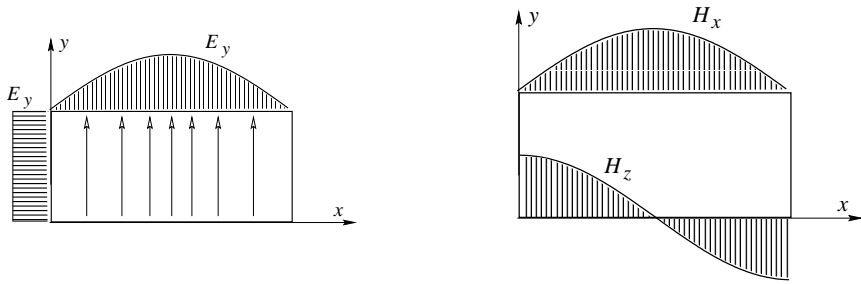
Моде H_{10} соответствуют следующие значения составляющих полей:

$$\begin{aligned} H_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\frac{\pi}{a}x, \\ H_x &= j\beta\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}x, \\ H_y &= 0, \\ E_x &= 0, \\ E_y &= -j\omega\mu\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}x. \end{aligned}$$

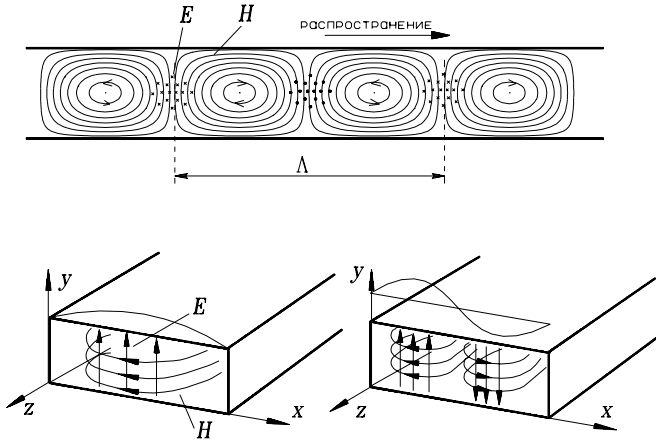
Поля здесь определены с точностью до множителя, одинакового для всех компонент. Этот множитель определяется, если задана мощность волны, распространяющейся по волноводу.

Структура волны H_{10} может быть выяснена с помощью графиков

(см. рис.):



Для уяснения структуры поля следует также учитывать, что H_z и H_x сдвинуты во времени по фазе на 90° . Картина силовых линий магнитного поля представлена на рис.



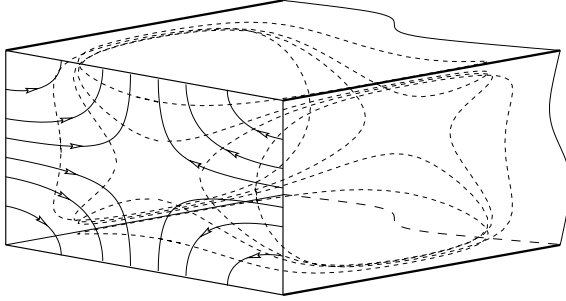
Структура поля моды H_{n0} может быть получена путем n -кратного повторения структуры моды H_{10} в направлении оси x .

Моды типа H_{n0} характерны тем, что поле не зависит от координаты y . Кроме того, критическая длина волны и, следовательно, длина волны в волноводе не зависят от высоты волновода b :

$$\lambda_{n0} = 2a/n; \quad n = 1, 2, \dots$$

В технике наибольшее применение нашли прямоугольные волноводы с волной H_{10} . При этом размеры их обычно выбираются так, чтобы в рабочем диапазоне частот высшие моды не могли распространяться.

Рассмотрим теперь структуру волны H_{11} . В этом случае составляющие поля зависят также от y (см. рис.).



Структура поля здесь более сложна, так как отличны от нуля все составляющие, кроме E_z .

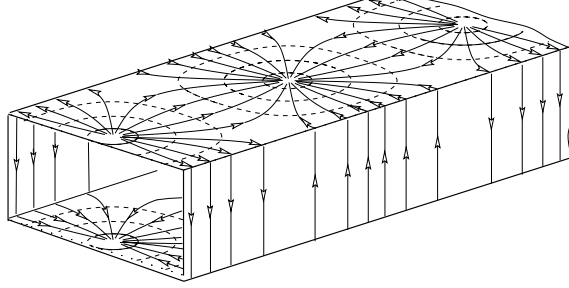
Структура полей типа H_{nm} может быть получена путем n -кратного повторения структуры H_{11} в направлении x и m -кратного повторения в направлении y .

Имеет смысл рассмотреть также токи в стенках. Плотность тока в стенках может быть найдена из граничного условия

$$\vec{K} = \vec{H} \times \vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали, направленный в металл. Это значит, что поверхностная плотность тока численно равна тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля и направлена перпендикулярно магнитному полю, поэтому линии тока в стенках могут быть построены как линии, ортогональные семейству линий магнитного поля на поверхности волновода.

Вначале построим линии тока для волны H_{10} (см. рис. на след. стр.).



Для волны H_{11} линии тока на широкой и узкой стенках аналогичны линиям тока на широкой стенке для волны H_{10} . Линии тока для волн H_{nm} получаются путем повторения картины, полученной для волны H_{11} , n и m раз на различных стенках.

Вычислим также мощность, распространяющуюся через волновод с волной H_{10} . Это позволит найти нормирующий множитель. Мощность определяется потоком вектора Пойнтинга через сечение волновода:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*) dS.$$

Для моды H_{10} отличны от нуля лишь E_y и H_x :

$$\begin{aligned} E_y &= -Aj\omega\mu \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a}x, \\ H_x &= Aj\beta \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a}x. \end{aligned}$$

Подставляя E_y и H_x под интеграл, получим

$$P = A^2 \frac{\omega\mu\pi^2\beta}{4} \cdot \frac{b}{a},$$

откуда может быть определен нормирующий множитель:

$$A = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{P}{\omega\mu\beta} \cdot \frac{a}{b}}.$$

Мощность может быть выражена также через напряженность электрического поля в центре волновода E_0 :

$$P = \frac{E_0^2}{4\zeta} ab \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}},$$

где $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$.

3.2.2. Волны Е-типа

Для функции ϕ , определяющей электрические волны, имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + g^2 \phi = 0$$

при условии на границе $\phi = 0$.

Решение уравнения найдем в виде

$$\phi(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$$

Для функций X и Y аналогично предыдущему можно записать

$$X = A \cos g_x x + B \sin g_x x, \quad Y = C \cos g_y y + D \sin g_y y.$$

Граничные условия теперь другие. А именно, при $x = 0$ $X = 0$, откуда следует, что

$$A = 0, \quad X = \sin g_x x;$$

при $y = 0$ $Y = 0$, откуда

$$C = 0, \quad Y = \sin g_y y;$$

при $x = a$ $X = 0$, т.е. $\sin g_x a = 0$, откуда

$$g_x a = n\pi \text{ и } g_x = \frac{n\pi}{a}; \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

при $y = b$ $Y = 0$, т.е. $\sin g_y b = 0$, откуда

$$g_y b = m\pi \text{ и } g_y = \frac{m\pi}{b}; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $\phi(x, y)$ равна

$$\phi(x, y) = \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \sin \frac{m\pi}{b}y.$$

Заметим, что ни один из индексов n и m в этом случае не может принимать нулевое значение, так как это приведет к тождественному обращению в нуль функции ϕ .

Как и для магнитных мод, собственные значения определяются соотношением

$$g_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда могут быть найдены критические длины волн (для вакуума):

$$\lambda_{nm} = \frac{2\pi}{g_{nm}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}.$$

Теперь можно записать также выражения для составляющих поля:

$$H_z = 0,$$

$$H_x = j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial y} = j\omega\varepsilon \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \cos \frac{m\pi}{b}y,$$

$$H_y = -j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial x} = -j\omega\varepsilon \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a}x \cdot \sin \frac{m\pi}{b}y,$$

$$E_z = (k^2 + \gamma^2) \cdot \phi(x, y) = \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \sin \frac{m\pi}{b}y,$$

$$E_x = -\gamma \frac{\partial\phi}{\partial x} = -j\beta \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a}x \cdot \sin \frac{m\pi}{b}y,$$

$$E_y = -\gamma \frac{\partial\phi}{\partial y} = -j\beta \frac{m\pi}{b} \sin \frac{n\pi}{a}x \cdot \cos \frac{m\pi}{b}y.$$

Так как n и m не могут принимать нулевые значения, то самой низкочастотной модой будет E_{11} , для которой критическая длина волны равна

$$\lambda_{11} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

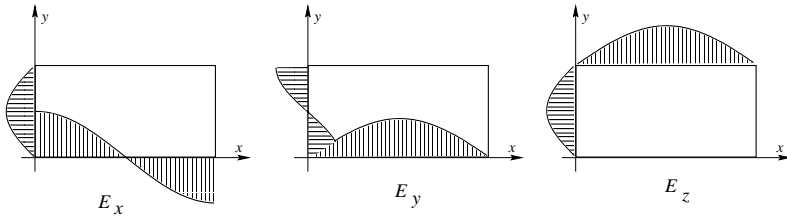
Данная критическая длина волны меньше критической длины волны самой низкочастотной магнитной моды H_{10} , равной $2a$.

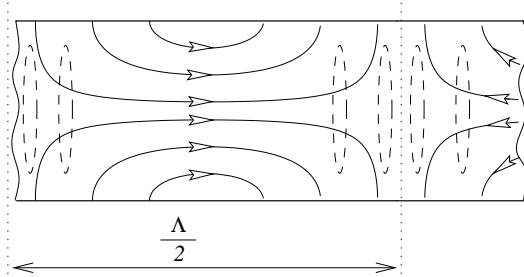
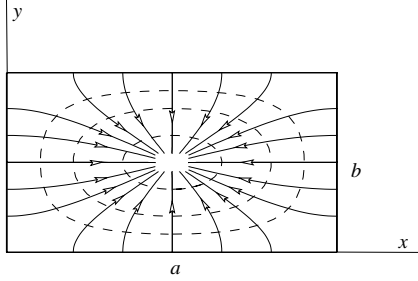
Обратим внимание на то, что собственные значения g_{nm}^2 и соответственно критические длины волн λ_{nm} для высших электрических и магнитных мод совпадают. Таким образом, имеет место двукратное вырождение для мод с ненулевыми индексами.

Для волны E_{11} имеем

$$\begin{aligned} H_z &= 0, \\ H_x &= j\omega\varepsilon \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi}{a}x \cdot \cos \frac{\pi}{b}y, \\ H_y &= -j\omega\varepsilon \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi}{a}x \cdot \sin \frac{\pi}{b}y, \\ E_z &= \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right] \cdot \sin \frac{\pi}{a}x \cdot \sin \frac{\pi}{b}y, \\ E_x &= -j\beta \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi}{a}x \cdot \sin \frac{\pi}{b}y, \\ E_y &= -j\beta \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi}{a}x \cdot \cos \frac{\pi}{b}y. \end{aligned}$$

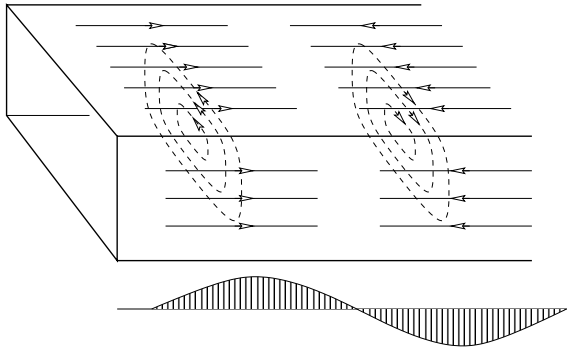
Рассмотрим структуру поля E_{11} (см. рис.).





Поля высших мод получаются путем многократного повторения картины поля E_{11} .

Найдем также линии токов в стенках. Так как магнитное поле для E-мод поперечно, то, очевидно, токи могут быть только продольными (см. рис.).



3.3.1. Магнитные моды

При исследовании круглого волновода лапласиан в уравнениях для функций ψ и ϕ удобно записывать в полярной системе координат:

$$\Delta_{xy} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Подставляя этот лапласиан в уравнение для ψ , получим

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + g^2 \psi = 0.$$

Уравнение решается методом разделения переменных. Для этого полагаем, что

$$\psi = R(r) \cdot \Phi(\varphi).$$

Подставляя ψ в предыдущее уравнение и деля на $R \cdot \Phi$, получим

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + g^2 = 0.$$

Данное уравнение распадается на два:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -\kappa^2, \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} - \frac{\kappa^2}{r^2} + g^2 &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \kappa^2 \Phi = 0.$$

Решение такого уравнения имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} \sin \kappa \varphi \\ \cos \kappa \varphi \end{cases}.$$

Так как решение периодически по φ , то для $\varphi = 2\pi$ должно выполняться условие

$$2\pi\kappa = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда

$$\kappa = m,$$

где m принимает указанные значения.

Уравнение для R принимает вид

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + (g^2 - \frac{m^2}{r^2}) = 0.$$

Это уравнение Бесселя. Его решениями являются функции Бесселя и Неймана $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$. Второе решение должно быть отброшено, так как обращается в бесконечность в центре (при $r = 0$). Поэтому

$$R = J_m(gr).$$

Для ψ мы имели условие $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ на границе сечения волновода. В данном случае $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$. Поэтому граничное условие требует, чтобы

$$J'_m(ga) = 0,$$

где a – радиус волновода.

Корни производной функции Бесселя обозначим через t'_{mn} :

$$g'_{mn} a = t'_{mn},$$

откуда

$$g'_{mn} = \frac{t'_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Данная формула дает собственные значения задачи, которые зависят от двух индексов. Собственные функции ψ_{mn} в данном случае имеют вид

$$\psi_{mn} = J_m(g'_{mn} r) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix}.$$

Мы видим здесь, что каждому значению g_{mn} соответствуют две собственные функции, кроме случая $m = 0$, т.е. имеет место двукратное вырождение.

Имея выражение для функции ψ , мы можем найти теперь все компоненты полей. Для этого воспользуемся полученными ранее соотношениями для магнитных мод

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\gamma \cdot \text{grad } \psi + g^2 \psi \cdot \vec{z}_0, \\ \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \text{grad } \psi \times \vec{z}_0.\end{aligned}$$

Учитывая, что составляющие в полярной системе координат функций $\text{grad} \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ и $\text{grad} \times \vec{z}_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, -\frac{\partial}{\partial r} \right)$, получим

$$\begin{aligned}H_z &= g'_{mn}{}^2 \cdot J_m(g'_{mn}r) \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array}, \\ H_r &= -\gamma \frac{\partial \psi}{\partial r} = -j\beta g'_{mn} \cdot J'_m(g'_{mn}r) \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array}, \\ H_\varphi &= -\frac{\gamma}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \pm \frac{j\beta m}{r} J_m(g'_{mn}r) \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array}, \\ E_r &= -\frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \pm \frac{j\omega\mu m}{r} J_m(g'_{mn}r) \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array}, \\ E_\varphi &= j\omega\mu \frac{\partial \psi}{\partial r} = j\omega\mu g'_{mn} \cdot J'_m(g'_{mn}r) \begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array}.\end{aligned}$$

Критическая длина волны может быть найдена по формуле

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{g'_{mn}} = \frac{2\pi a}{t'_{mn}}.$$

Основная мода соответствует наименьшей величине t'_{mn} . Такой модой является мода H_{11} , для которой $t'_{11} \approx 1.84$. Это наименьший корень уравнения $J'_1(t) = 0$ (табл. 1).

При $m = 1$ и $n = 1$ получается мода H_{11} , по структуре поля родственная моде H_{10} в прямоугольном волноводе. Компоненты поля для этой моды равны

Таблица 1: Корни уравнения $J'_m(t) = 0$.

m n	0	1	2	3	4	5
1	3.83	1.84	3.05	4.20	5.32	6.42
2	7.016	5.33	6.71	8.01	9.286	10.52
3	10.17	8.53	9.972	11.355	12.68	13.99

$$H_z = g'_{11}{}^2 \cdot J_1(g'_{11}r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

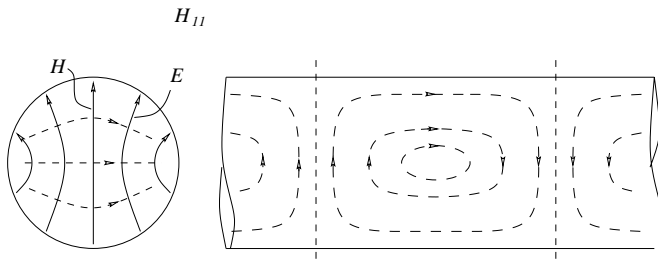
$$H_r = -j\beta g'_{11} \cdot J'_1(g'_{11}r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

$$H_\varphi = \pm \frac{j\beta}{r} J_1(g'_{11}r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

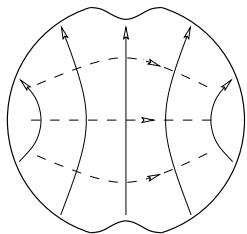
$$E_r = \pm \frac{j\omega\mu}{r} J_1(g'_{11}r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$E_\varphi = j\omega\mu g'_{11} \cdot J'_1(g'_{11}r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Структура поля H_{11} моды представлена на рис.



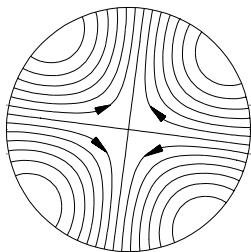
Выше уже отмечалось, что в круглом волноводе мода H_{11} является двукратно вырожденной. Ей соответствуют две пары векторных функций, отличающихся одна от другой поляризациями на 90° . Волна, произвольно поляризованная, может быть представлена в виде линейной комбинации двух основных собственных функций. Вырождение приводит к ряду неудобств при использовании круглых волноводов с модой



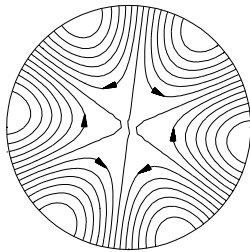
При наличии неточностей и неоднородностей вырождение снимается, и постоянные распространения двух типов волн становятся различными. Это приводит к изменению фазовых соотношений составляющих и в результате к изменению вида и плоскости поляризации. Для того чтобы этого избежать, иногда преднамеренно сильно искажают поперечное сечение волновода (см. рис.), чтобы малые неточности не могли существенно исказить картину.

Волны типа H_{m1} могут быть получены из волны H_{11} путем азимутальной деформации (см. рис.).

H_{21}

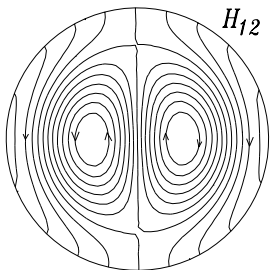


H_{31}



Волны H_{1n} получаются наращиванием в радиальном направлении (см. рис.).

H_{12}

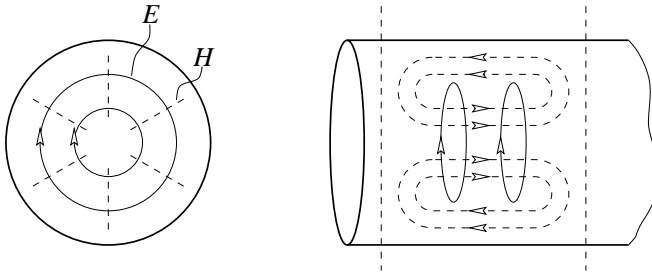


Волны типа H_{mn} при $m > 1, n > 1$ получаются аналогичным образом. Особый интерес представляют симметричные моды, из которых первой является мода H_{01} ($n = 1$).

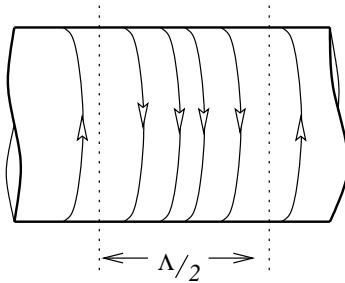
Компоненты полей этой моды равны

$$\begin{aligned}
 H_z &= g'_{01}{}^2 \cdot J_0(g'_{01}r), \\
 H_r &= -j\beta g'_{01} \cdot J'_0(g'_{01}r) = j\beta g'_{01} J_1(g'_{01}r), \\
 H_\varphi &= 0, \\
 E_r &= 0, \\
 E_\varphi &= -j\omega\mu g'_{01} \cdot J'_0(g'_{01}r) = j\omega\mu g'_{01} J_1(g'_{01}r).
 \end{aligned}$$

Структура поля представлена на рис.



Отметим, что на стенках волновода магнитное поле имеет только продольную составляющую. Это значит, что токи в стенках имеют только поперечную составляющую и образуют замкнутые линии (см. рис.).



Особенностью H_{01} моды являются очень малые потери в стенках, которые уменьшаются с ростом частоты. В связи с этим мода H_{01} представляет интерес для передачи энергии на большие расстояния (например, в волноводных линиях электропередачи). Однако ситуация осложняется тем, что мода H_{01} не является основной в круглом волноводе.

3.3.2. Электрические моды

Уравнение для функции ϕ имеет тот же вид, что и для функции ψ , поэтому решение аналогично, т.е.

$$\psi = J_m(gr) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} .$$

Граничное условие в этом случае имеет вид

$$\phi = 0 \text{ при } r = a,$$

т.е.

$$J_m(ga) = 0,$$

где a – радиус волновода. Корни функции Бесселя m -го порядка обозначим через t_{mn} :

$$g_{mn}a = t_{mn},$$

откуда

$$g_{mn} = \frac{t_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда имеем

$$\phi_{mn} = J_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} .$$

Как видим, функции ϕ при $m \neq 0$ также двукратно вырождены.

С помощью функции ϕ можно теперь получить составляющие поля для Е-волн:

$$H_z = 0,$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \mp \frac{j\omega\varepsilon m}{r} J_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} ,$$

$$H_\varphi = -j\omega\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial r} = -j\omega\varepsilon \cdot g_{mn} J'_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} ,$$

$$E_z = g_{mn}^2 \phi = g_{mn}^2 J_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} ,$$

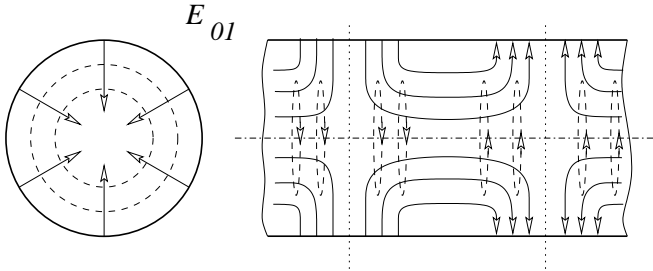
$$E_r = -\gamma \frac{\partial\phi}{\partial r} = -j\beta g_{mn} J'_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} ,$$

$$E_\varphi = -\frac{\gamma}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \pm \frac{j\beta m}{r} J_m(g_{mn}r) \begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix} .$$

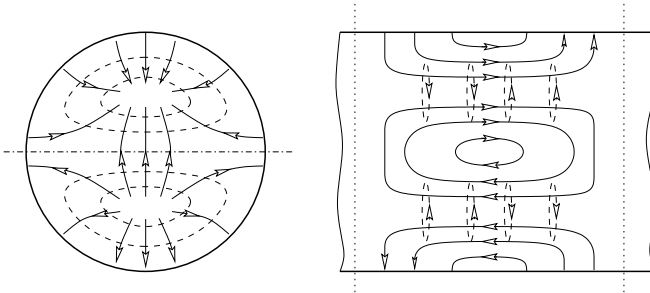
Наиболее простой структурой обладает симметричная E_{01} мода:

$$\begin{aligned} H_z &= 0, \\ H_r &= 0, \\ H_\varphi &= -j\omega\varepsilon \cdot g_{01} J'_0(g_{01}r) = j\omega\varepsilon g_{01} J_1(g_{01}r), \\ E_z &= g_{01}^2 J_0(g_{01}r), \\ E_r &= -j\beta g_{01} J'_0(g_{01}r) = j\beta g_{01} J_1(g_{01}r), \\ E_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Структура поля изображена на рис.



Структура полей типа E_{0n} может быть получена сжатием по радиусу. Рассмотрим также структуру полей E_{11} моды (см. рис.).



Корни функции Бесселя $J_m(x)$ приведены в таблице 2.

Таблица 2: Корни уравнения $J_m(t) = 0$.

m n	0	1	2	3	4	5
1	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77
2	5.52	7.016	8.42	9.76	11.06	12.34
3	8.65	10.17	11.62	13.015	14.37	

3.3.3. Волноводные моды в коаксиальной линии

В коаксиальной линии наряду с ТЕМ-волной могут распространяться также волноводные моды, имеющие продольную компоненту электрического или магнитного поля.

Рассмотрим коротко Н-волны в коаксиальной линии. Уравнение для функции ψ по-прежнему имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + g^2 \psi = 0.$$

Данное уравнение распадается на два. В частности, для $R(r)$ мы имели уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{R} \frac{dR}{dr} + (g^2 - \frac{m^2}{r^2}) = 0.$$

Так как сечение линии двусвязно и центр ($r = 0$) не входит в область поля, то решение должно быть представлено в виде линейной комбинации функции Бесселя $J_m(gr)$ и функции Неймана $N_m(gr)$:

$$R = A \cdot J_m(gr) + B \cdot N_m(gr).$$

Данная функция должна удовлетворять граничным условиям $\frac{dR}{dr} = 0$ при $r = a$ и $r = b$ ($b > a$), т.е.

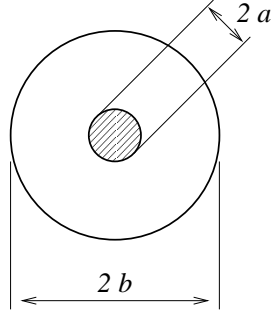
$$A \cdot J'_m(ga) + B \cdot N'_m(ga) = 0,$$

$$A \cdot J'_m(gb) + B \cdot N'_m(gb) = 0.$$

Полученная система однородных линейных уравнений относительно A и B совместна лишь при равенстве нулю определителя системы

$$J'_m(ga) \cdot N'_m(gb) - J'_m(gb) \cdot N'_m(ga) = 0.$$

Из данного уравнения можно определить корни g'_{mn} , определяющие собственные функции ψ_{mn} . Эти корни зависят от радиуса a и отношения b/a (см. рис.).



Структура полей может быть получена из структуры соответствующих мод в круглом волноводе.

Аналогично этому, для электрических мод можно получить дисперсионное уравнение

$$J_m(ga) \cdot N_m(gb) - J_m(gb) \cdot N_m(ga) = 0.$$

Представляет интерес иметь приближенную оценку для критической длины волны низших волноводных мод.

Наибольшей критической длиной волны обладает магнитная мода H_{11} , для которой

$$\lambda_{11} \approx 2\pi \frac{a + b}{2},$$

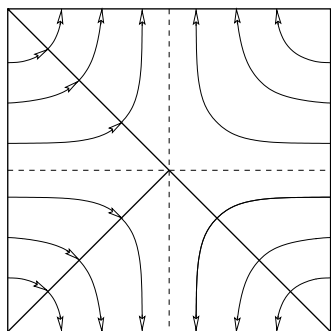
то есть длине средней окружности.

Для того чтобы волноводные моды в коаксиальной линии не распространялись, необходимо на коротких волнах уменьшать поперечные размеры этих линий. Данное требование ограничивает допустимые поперечные размеры коаксиальной линии в зависимости от рабочего диапазона длин волн.

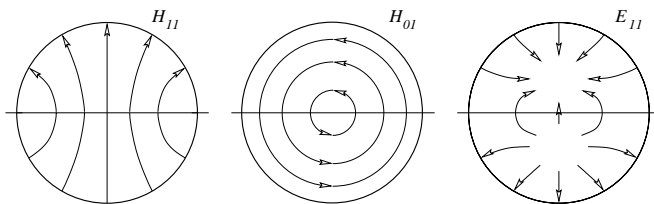
и квазистатические волноводы

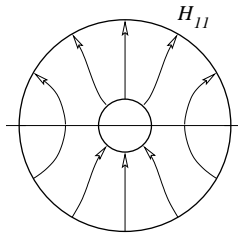
Кроме прямоугольных и круглых волноводов точное решение может быть получено также для эллиптических волноводов. Для всех остальных волноводов приходится пользоваться искусственными, приближенными или вычислительными методами. Разработаны вычислительные программы, позволяющие рассчитывать поля и критические частоты для некоторого числа мод низших порядков.

В ряде случаев решение может быть получено из решения для круглого или прямоугольного волноводов путем введения в последние проводящих перегородок. Рассмотрим некоторые сечения, получаемые таким образом.

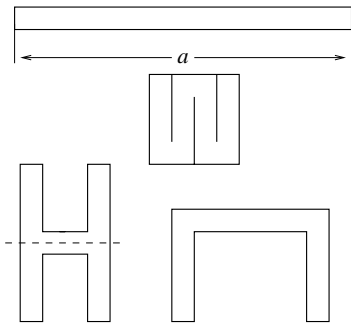
Квадратный волновод H_{11}

Нетрудно показать, что для такого типа волны электрические силовые линии перпендикулярны диагональным плоскостям, а линии магнитного поля касательны к этим плоскостям (см. рис.). Поэтому, если ввести проводящие поверхности в диагональных плоскостях, то граничные условия не нарушаются, а волновод распадается при этом на волноводы треугольного сечения, имеющие ту же критическую волну, что и исходный волновод.

Круглый волновод (см. рис.)

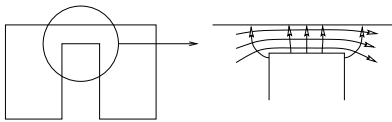


Отдельный класс волноводов составляют волноводы с сечением, свернутым из сечения прямоугольного волновода (см. рис.).



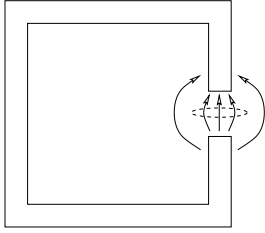
Таким образом могут быть получены волноводы, имеющие поперечное сечение, малое по сравнению с длиной волны. Наибольшее применение из этих волноводов получили Н- и П-образные волноводы (см. рис.).

Наконец, имеются также квазистатические волноводы, образуемые из П-образных путем уменьшения зазора (см. рис.).



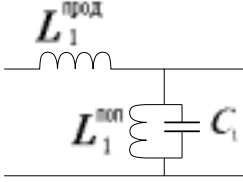
Такие волноводы вдали от критической волны близки к плоской линии. Они имеют критическую волну много больше размеров поперечного сечения.

Квазистатическими являются также щелевые волноводы. Так как такие волноводы имеют поперечное сечение, малое по сравнению с длиной волны, то поле в них квазистационарно и для расчетов можно исполь-



Рассмотрим, например, щелевой волновод (см. рис.). В нем в щели поля поперечны, а в остальной части магнитное поле продольно и поперечно, а электрическим полем можно пренебечь.

Эквивалентная схема ячейки будет иметь следующий вид (см. рис.)



Здесь

$$Z_1 = j\omega L_1^{\text{прод}},$$

$$Y_1 = j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1^{\text{поп}}}.$$

Постоянная распространения равна

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{j\omega L_1^{\text{прод}} \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1^{\text{поп}}} \right)} = \\ &= \sqrt{\omega L_1^{\text{прод}} \left(\frac{1}{\omega L_1^{\text{поп}}} - \omega C_1 \right)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что распространение имеет место при условии

$$\frac{1}{\omega L_1^{\text{поп}}} - \omega C_1 < 0, \text{ т.е. } \omega > \frac{1}{\sqrt{L_1^{\text{поп}} C_1}} = \omega_{\text{кр}}.$$

Если это условие выполнено, то

$$\gamma = j\sqrt{\omega L_1^{\text{прод}} \left(\omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1^{\text{поп}}} \right)} = j\omega\sqrt{L_1^{\text{прод}} C_1 \left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_1^{\text{поп}} C_1} \right)}.$$

В то же время $\frac{1}{L_1^{\text{поп}} C_1} = \omega_{\text{кр}}^2$, $L_1^{\text{прод}} C_1 = \frac{1}{c^2}$.

Подставляя эти выражения в формулу для γ , получим

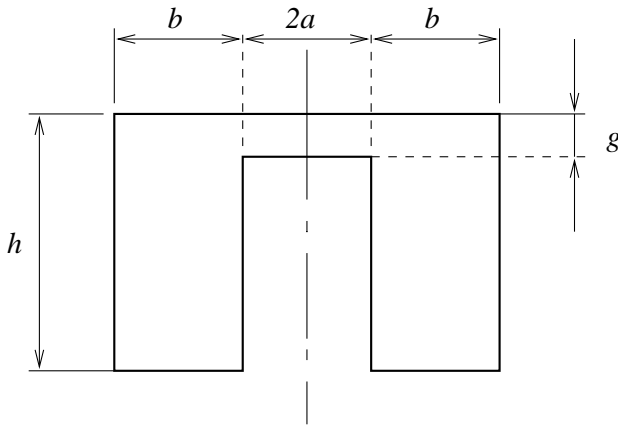
$$\gamma = j\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{\omega^2}} = j\beta.$$

Длина волны в волноводе равна

$$\Lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{\omega^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}},$$

т.е. мы имеем соотношение, аналогичное обычному для волноводов.

Применим полученное соотношение к П-образному волноводу с малым зазором (см. рис.).



Здесь

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 S_1}{g} = \frac{\varepsilon_0 a}{g}, \\ L_1^{\text{поп}} &= \mu_0 S_{\text{сеч}} = \mu_0 b h \quad (l = 1), \\ \omega_{\text{кр}}^2 &= \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 a}{g} \cdot \mu_0 b h} = \frac{g}{\mu_0 \varepsilon_0 \cdot a b h} = \frac{g c^2}{a b h}. \end{aligned}$$

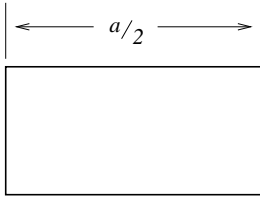
Отсюда критическая длина волны равна

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{кр}}} = 2\pi \sqrt{\frac{abh}{g}}.$$

Из полученной формулы видно, что, уменьшая размер g , можно сколь угодно увеличить критическую длину волны.

Отметим, что критическая волна соответствует резонансу емкости с поперечной индуктивностью. Это – не случайность, критическая волна во всех случаях может быть определена как резонансная для поперечного сечения.

Пример: мода H_{10} в прямоугольном волноводе (см. рис.).



$$\frac{a}{2} = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{4} \rightarrow \lambda_{\text{кр}} = 2a.$$

3.5. Энергетические соотношения для волноводов

Вычислим мощность волны, распространяющейся в волноводе:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 dS.$$

Вычислим мощность для Н-мод. Для них

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega\mu \operatorname{grad} \psi \times \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}, \\ \vec{H} &= (-\gamma \operatorname{grad} \psi + g^2 \psi \vec{z}_0) \cdot e^{-\gamma z}. \end{aligned}$$

Подставляя это в подынтегральное выражение, вычислим

$$\begin{aligned} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 &= j\omega\mu\gamma^* [(\operatorname{grad} \psi \times \vec{z}_0) \times \operatorname{grad} \psi] \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z} \cdot e^{-\gamma^* z} = \\ &= j\omega\mu\gamma^* (\operatorname{grad} \psi)^2 \cdot e^{-(\gamma+\gamma^*)z}. \end{aligned}$$

Подставляя это под интеграл, найдем мощность

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S j\omega\mu\gamma^* \cdot (\operatorname{grad} \psi)^2 \cdot e^{-(\gamma+\gamma^*)z} dS.$$

При $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ γ – мнимая величина: $\gamma = j\beta$, $\gamma^* = -j\beta$. Тогда

$$P = \frac{1}{2} \omega\mu\beta \int_S (\operatorname{grad} \psi)^2 dS = \frac{1}{2} \omega\mu\beta g_m^2 \int_S \psi^2 dS.$$

При $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ γ – вещественная величина. Тогда $P = 0$.

Для E -мод (электрических) аналогично

$$P = \frac{1}{2} \omega\varepsilon\beta g_m^2 \int_S \phi^2 dS \text{ при } \lambda < \lambda_{\text{кр}}.$$

Обратим внимание на то, что с приближением к критической волне β стремится к нулю, а мощность при постоянной амплитуде \vec{E} или \vec{H} убывает до нуля. Это значит, что для передачи заданной мощности напряженность полей приходится увеличивать, что приводит к пробоям и большему затуханию. Поэтому работа вблизи критической волны невыгодна.

Рассмотрим соотношения для плотности энергии. Плотность электрической и магнитной энергии для H -мод равна

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon|E|^2}{2} &= \frac{\varepsilon}{2} (\omega\mu)^2 \cdot (\operatorname{grad} \psi)^2, \\ \frac{\mu|H|^2}{2} &= \frac{\mu}{2} \{g_m^4 \cdot \psi^2 + \beta^2 (\operatorname{grad} \psi)^2\}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что плотность энергии магнитного и электрического полей не равны между собой в любой точке внутри волновода.

В то же время можно показать, что запасы электрической и магнитной энергии на единицу длины волновода (т.е. в среднем по сечению) равны друг другу. Действительно,

$$W_e = \int_S \frac{\varepsilon|E|^2}{2} dS = \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\omega\mu)^2 \int_S (\operatorname{grad} \psi)^2 dS = \frac{\varepsilon}{2} (\omega\mu)^2 \cdot g_m^2 \int_S \psi^2 dS,$$

$$\begin{aligned}
W_h &= \int_S \frac{\mu H}{2} dS = \frac{\mu}{2} g_m^4 \int_S \psi^2 dS + \frac{\mu}{2} \cdot \beta^2 \int_S (\text{grad } \psi)^2 dS = \\
&= \frac{\mu}{2} g_m^4 \int_S \psi^2 dS + \frac{\mu}{2} \beta^2 g_m^2 \int_S \psi^2 dS = \frac{\mu}{2} g_m^2 (g_m^2 + \beta^2) \int_S \psi^2 dS.
\end{aligned}$$

В то же время

$$g_m^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2.$$

Подставляя это в выражения для W_h , получим

$$W_h = \frac{\mu}{2} g_m^2 \omega^2 \mu \varepsilon \int_S \psi^2 dS = \frac{\varepsilon}{2} (\omega \mu)^2 \cdot g_m^2 \int_S \psi^2 dS.$$

Сравнение показывает, что действительно $W_h = W_e$.

Для нераспространяющихся мод γ – вещественная величина, поэтому преобладает магнитная (для Н-мод) или электрическая (для Е-мод) энергия, и входное сопротивление оказывается реактивным.

3.6. Фазовая и групповая скорости

Из полученных ранее соотношений можно найти фазовую скорость (зная длину волны):

$$v_\phi = \lambda f = \frac{\lambda f}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} > c.$$

Таким образом, фазовая скорость больше скорости света, что, однако, не противоречит теории относительности.

Найдем групповую скорость. Она может быть определена как скорость перемещения максимума биений волн двух близких частот.

Пусть мы имеем сумму двух волн близких частот

$$e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} + e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)} = e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)} \cdot \left\{ 1 + e^{j[(\omega_2 - \omega_1)t - (\beta_2 - \beta_1)z]} \right\}.$$

Максимум соответствует условию

$$(\omega_2 - \omega_1)t - (\beta_2 - \beta_1)z = 0.$$

Отсюда, соликая ω и β и беря малые интервалы t и z , получим в пределе

$$\Delta\omega \cdot \Delta t = \Delta\beta \cdot \Delta z = 0,$$

откуда

$$v_{\text{гр}} = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

в отличие от фазовой скорости $v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}$.

Найдем групповую скорость для волновода

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega}.$$

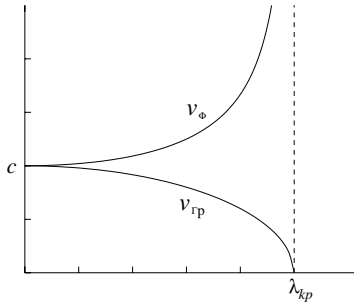
$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \sqrt{\left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2 - 1} = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\omega} &= \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}} \frac{2\omega/\omega_{\text{кр}}^2}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}\right)^2 - 1}} = \frac{2\pi\omega}{\lambda_{\text{кр}}\omega_{\text{кр}}^2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}\right)^2 - 1}} = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}\omega_{\text{кр}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_{\text{гр}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} < c.$$

Для волновода получаем последнее соотношение, связывающее фазовую и групповую скорости (см. рис.):



$$v_{\text{гр}} \cdot v_{\text{ф}} = c^2.$$

Иногда употребляют другое определение групповой скорости:

$$v_{\text{гр}} = \frac{P}{W},$$

где P – мощность в волноводе, W – средний запас энергии на единицу длины волновода.

Используя полученные ранее соотношения, имеем (для Н-волн)

$$P = \frac{1}{2} \omega \mu \beta g_m^2 \int_S \psi^2 dS,$$

$$W = \frac{\varepsilon}{2} (\omega \mu)^2 \cdot g_m^2 \int_S \psi^2 dS.$$

Отсюда

$$v_{\text{гр}} = \frac{P}{W} = \frac{\beta}{\omega \mu \varepsilon}.$$

Фазовая скорость, как было определено выше,

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Подставляя ω/β в выражение для $v_{\text{гр}}$, находим

$$v_{\text{гр}} \cdot v_{\text{ф}} = \frac{1}{\varepsilon \mu} = c^2.$$

Сравнивая с найденным ранее соотношением, находим, что оба определения групповой скорости дают одинаковый результат.

3.7. Волны Бриллюэна

Волны в волноводе можно рассмотреть еще в одном аспекте.

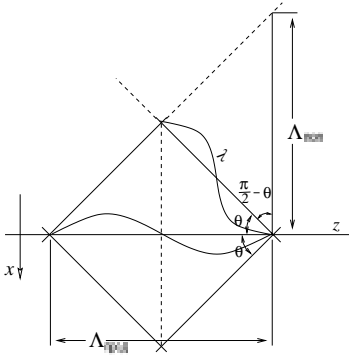
Бриллюэном было отмечено, что существует связь между однородными плоскими волнами и волнами в прямоугольном волноводе. Эта связь может быть обнаружена также в волноводах другой формы.

Например, для моды H_{10} в прямоугольном волноводе

$$E_y = -\frac{j\omega\mu\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\beta z} = -\frac{j\omega\mu\pi}{2a} \left\{ e^{j\left(\frac{\pi x}{a} - \beta z\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi x}{a} + \beta z\right)} \right\},$$

то есть сумма двух плоских волн.

Рассмотрим волну H_{10} в прямоугольном волноводе. В этом случае поле можно представить в виде двух плоских волн, распространяющихся под углом друг к другу между двумя плоскостями (образованными широкими стенками) (см. рис.).



Чтобы это показать, рассмотрим две плоские волны, распространяющиеся между параллельными проводящими плоскостями под углами $\pm\theta$ к оси z . Тогда нетрудно видеть, что $\frac{\lambda}{\Lambda_{\text{прод}}} = \cos \theta$, $\frac{\lambda}{\Lambda_{\text{поп}}} = \sin \theta$.

В то же время две волны в поперечном к z сечении дают стоячую волну, причем расстояние между минимумами равно $\frac{\Lambda_{\text{поп}}}{2}$. Если угол θ выбран так, чтобы расстояние между минимумами было равно a , то на линии минимума можно поместить проводящие стенки, не нарушая картину поля. Таким образом, получаем условие

$$\frac{\Lambda_{\text{поп}}}{2} = a, \text{ или } \sin \theta = \frac{\lambda}{2a}.$$

Очевидно, что такое соотношение можно выполнить лишь при условии, что

$$\lambda < 2a, \text{ т.е. } \lambda_{\text{кр}} = 2a.$$

Теперь можно определить длину волны в направлении оси z :

$$\Lambda_{\text{прод}} = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Кроме того, можно отметить, что при приближении к критической волне угол θ приближается к $\frac{\pi}{2}$, т.е. вблизи критической волны распространение в основном поперечно.

Полученные соотношения позволяют найти также и групповую скорость

$$v_{\text{гр}} = c \cdot \cos \theta = c \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Для волн H_{mn} и E_{mn} в прямоугольном волноводе поле в общем случае может быть получено в виде суммы четырех плоских волн, распространяющихся под одинаковым углом к оси z .

В случае более сложных волноводов поле может быть получено суммированием бесконечного числа плоских волн, направление распространения которых образуют конус с углом θ при вершине. Если заранее искать решение в виде суммы плоских волн, то можно получить интегральное уравнение для функций ψ и ϕ .

3.8. Затухание в волноводах

В волноводе с металлическими, неидеально проводящими стенками часть мощности теряется в стенках. Это приводит к затуханию распространяющихся волн. Формально это выражается в том, что для частот выше критической величина постоянной распространения оказывается уже не чисто мнимой, а появляется вещественная часть, обуславливающая затухание. Изменяется также и мнимая часть вследствие проникновения поля в стенку на толщину скин-слоя.

Изменение постоянной распространения γ вследствие потерь может быть вычислено приближенно в рамках теории возмущений. Предположим, что некоторая мода при отсутствии потерь описывается векторными функциями $\vec{E}_m \cdot e^{-\gamma_0 z}$, $\vec{H}_m \cdot e^{-\gamma_0 z}$. При появлении малых потерь

векторные функции несколько изменяются: $\vec{E} \cdot e^{-\gamma_0 z}$, $\vec{H} \cdot e^{-\gamma_0 z}$. Предположим, что при малом затухании эти функции мало отличаются от невозмущенных. Во всяком случае, это имеет место при отсутствии вырождения.

Для вычисления γ воспользуемся тем, что векторные функции удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{E}_m \cdot e^{-\gamma_0 z}) &= -j\omega\mu_0\vec{H}_m e^{-\gamma_0 z}, \\ \operatorname{rot}(\vec{H}_m \cdot e^{-\gamma_0 z}) &= j\omega\varepsilon_0\vec{E}_m e^{-\gamma_0 z}, \\ \operatorname{rot}(\vec{E} \cdot e^{-\gamma z}) &= -j\omega\mu_0\vec{H} e^{-\gamma z}, \\ \operatorname{rot}(\vec{H} \cdot e^{-\gamma z}) &= j\omega\varepsilon_0\vec{E} e^{-\gamma z},\end{aligned}$$

Пользуясь тождеством

$$\operatorname{rot}(\Phi \cdot \vec{F}) = \Phi \cdot \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} \Phi \times \vec{F},$$

после сокращения экспонент получим

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E}_m^* + \gamma_0 \cdot \vec{z}_0 \times \vec{E}_m^* &= j\omega\mu_0\vec{H}_m^*, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_m^* + \gamma_0 \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_m^* &= -j\omega\varepsilon_0\vec{E}_m^*, \\ \operatorname{rot} \vec{E} - \gamma \cdot \vec{z}_0 \times \vec{E} &= -j\omega\mu_0\vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \gamma \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon_0\vec{E}.\end{aligned}$$

Здесь $\gamma_0^* = -\gamma_0$, так как γ_0 — мнимая величина.

Составим выражение

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E}_m^* \times \vec{H}) + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}_m^*) &= \\ &= \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_m^* - \vec{E}_m^* \cdot \operatorname{rot} \vec{H} + \vec{H}_m^* \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_m^* = \\ &= \vec{H} \cdot (j\omega\mu_0\vec{H}_m^* - \gamma_0\vec{z}_0 \times \vec{E}_m^*) + \vec{E}_m^* \cdot (j\omega\varepsilon_0\vec{E} + \gamma\vec{z}_0 \times \vec{H}) - \\ &+ \vec{H}_m^* \cdot (-j\omega\mu_0\vec{H} + \gamma\vec{z}_0 \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (-j\omega\varepsilon_0\vec{E}_m^* - \gamma_0 \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_m^*) = \\ &= -\gamma_0 \cdot \vec{H} \cdot (\vec{z}_0 \times \vec{E}_m^*) - \gamma \cdot \vec{E}_m^* \cdot (\vec{z}_0 \times \vec{H}) + \gamma \cdot \vec{H}_m^* \cdot (\vec{z}_0 \times \vec{E}) + \gamma_0 \cdot \vec{E} \cdot (\vec{z}_0 \times \vec{H}_m^*) = \\ &= -\gamma_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot (\vec{E}_m^* \times \vec{H}) + \gamma \cdot \vec{z}_0 \cdot (\vec{E}_m^* \times \vec{H}) + \gamma \cdot \vec{z}_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_m^*) - \gamma_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_m^*) = \\ &= (\gamma - \gamma_0) \cdot (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0.\end{aligned}$$

Проинтегрируем полученное равенство по сечению волновода:

$$\oint_C (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC = (\gamma - \gamma_0) \int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS,$$

откуда

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\oint_C (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC}{\int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS}.$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор нормали, направленный в стенку, C – контур сечения волновода, S – сечение волновода.

Интеграл

$$\oint_C (\vec{E}_m^* \times \vec{H}) \vec{n} dC = 0$$

вследствие граничных условий для \vec{E}_m^* .

Далее, согласно условию Леонтовича,

$$\vec{E}_t = \zeta \cdot (\vec{H} \times \vec{n}) \approx \zeta \cdot (\vec{H}_m \times \vec{n})$$

на контуре поперечного сечения C . Последнее приближенное равенство связано с предположением, что наличие потерь мало изменяет поле.

Второй интеграл в числителе равен

$$\oint_C (\vec{E} \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dC = \oint_C \zeta \cdot [(\vec{H}_m \times \vec{n}) \times \vec{H}_m^*] \vec{n} dC = \zeta \cdot \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC.$$

В знаменателе \vec{E} и \vec{H} могут быть приближенно заменены на \vec{E}_m и \vec{H}_m :

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS &\approx \int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H}_m + \vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем

$$\gamma \approx \gamma_0 + \frac{\zeta \cdot \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{2 \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS}.$$

В результате мы можем вычислить мнимую и вещественную добавки к γ вследствие потерь в стенках волновода:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} \zeta \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{\operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS},$$

$$\Delta\beta = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Im} \zeta \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{\operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS}.$$

Учитывая, что

$$\zeta = \frac{1 + j}{\delta\sigma},$$

а также что

$$P_{\text{потерь}} = \frac{1}{2\delta\sigma} \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC \text{ —}$$

мощность потерь на единицу длины волновода и

$$P = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS \text{ —}$$

мощность волны в волноводе, окончательно получим

$$\alpha = \Delta\beta = \frac{P_{\text{пот}}}{2P}.$$

Затухание может быть также представлено в виде

$$\alpha = \frac{P_{\text{пот}}}{2P} = \frac{P_{\text{пот}}}{2v_{\text{гр}}W},$$

где

$$W = \frac{\mu_0}{2} \int_S |\vec{H}_m|^2 dS -$$

запас энергии на единицу длины в волноводе;

$$v_{\text{гр}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}} -$$

групповая скорость в волноводе.

Подставляя эти соотношения в выражение для α , получим:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2\delta\sigma} \oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{2\frac{\mu_0}{2} \int_S |\vec{H}_m|^2 dS c \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} = \frac{1}{2\delta\sigma\mu_0 c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} \frac{\oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS}.$$

Однако

$$\sigma = \frac{1}{\mu_m \omega \delta^2}.$$

Подставляя σ в последнее выражение для α , получим

$$\alpha = \Delta\beta = \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{\lambda} \frac{\mu_m}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} \frac{\oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS}.$$

Напомним условия, при которых получена эта формула. Предполагается, что в волноводе появление потерь мало изменяет поле. Это условие может быть нарушено в следующих случаях:

- а) близость к критической волне,
- б) наличие вырождения.

Легко получить формулу, которая остается корректной в окрестности критической частоты. Для этого рассмотрим полученную ранее точную формулу

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\oint (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC}{\int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS}.$$

Для определенности рассмотрим случай магнитных мод. В этом случае поперечная часть магнитного поля и электрическое поле связаны соотношением

$$\vec{H}_m^{\text{поп}} = \frac{\gamma_0}{j\omega\mu_0} \vec{z}_0 \times \vec{E}_m.$$

Для критической частоты γ_0 обращается в нуль. Поэтому при замене согласно теории возмущений в знаменателе $\vec{H}^{\text{поп}}$ на \vec{H}_m знаменатель обращается в нуль, что и приводит к некорректности. Это можно изменить, выразив первоначально в знаменателе \vec{H} через \vec{E} по формуле, аналогичной вышенаписанной:

$$\vec{H}^{\text{поп}} = \frac{\gamma}{j\omega \cdot \mu_0} \vec{z}_0 \times \vec{E}.$$

После этого заменим \vec{E} на \vec{E}_m в соответствии с теорией возмущений:

$$\begin{aligned} \gamma - \gamma_0 &= \frac{j\omega \cdot \mu_0 \oint (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC}{\int_S (\gamma |\vec{E}_m|^2 + \gamma_0 |\vec{E}_m|^2) dS} = \\ &= \frac{j\omega \cdot \mu_0 \oint (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC}{(\gamma + \gamma_0) \int_S |\vec{E}_m|^2 dS}. \end{aligned}$$

Умножая обе стороны равенства на $\gamma + \gamma_0$, получим

$$\gamma^2 - \gamma_0^2 = \frac{j\omega \cdot \mu_0 \oint (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{n} dC}{\int_S |\vec{E}_m|^2 dS}.$$

Данное соотношение остается корректным и для критической частоты. На критической частоте $\gamma_0 = 0$. Поэтому постоянная распространения получается путем извлечения корня квадратного. В результате затухание на этой частоте резко увеличивается, но остается конечным. Аналогично решается задача и для электрических мод.

Вычислим затухание для некоторых случаев.

Компоненты магнитного поля этой моды равны

$$\begin{aligned} H_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a}, \\ H_x &= \frac{j\pi\beta}{a} \sin \frac{\pi x}{a}, \\ H_y &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|H|^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos^2 \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a}.$$

Интеграл по сечению волновода равен

$$\begin{aligned} \int_S |H|^2 dS &= b \left\{ \frac{a}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + \frac{a}{2} \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^2 \right\} = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \beta^2 \right] = \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

так как

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \beta^2 = g^2 + \beta^2 = k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

Интеграл по контуру сечения

$$\begin{aligned} \oint_C |H|^2 dC &= 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 b + 2 \cdot \frac{a}{2} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 + \left(\frac{\pi\beta}{a}\right)^2 \right] = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \left(2b + \frac{4a^3}{\lambda^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \left(2b + a \frac{\lambda_{\text{кр}}^2}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти интегралы в выражение для α , получим

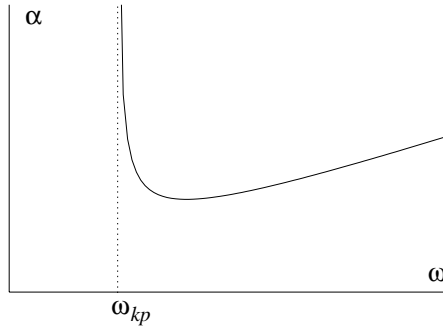
$$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\delta}{\lambda} \cdot \frac{\mu_M}{\mu_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \left(2b + a \frac{\lambda_{\text{кр}}^2}{\lambda^2} \right)}{\frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2}} =$$

$$= \frac{\pi \delta \mu_M}{\lambda b \mu_0} \left(1 + \frac{2\delta}{a} \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}}.$$

Пример: Прямоугольный волновод 10×23 мм², медь. $\lambda = 3$ см, $\mu_M = \mu_0$, $b = 1$ см, $a = 2.3$ см, $\lambda_{кр} = 4.6$ см, $\delta \approx 0.64 \cdot 10^{-4}$ см, $f = 10^{10}$ Гц.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi \cdot 0.64 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1 + \frac{2}{2.3} \cdot \left(\frac{3}{4.6}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4.6}\right)^2}} \approx 1.14 \cdot 10^{-4} \text{ неп/см} = \\ &= 9.9 \cdot 10^{-4} \text{ дБ/см} = 9.9 \cdot 10^{-2} \text{ дБ/м}. \end{aligned}$$

Изменение затухания α в зависимости от частоты представлено на рис.



3.8.2. Круглый волновод. Мода H_{01}

$$\begin{aligned} H_z &= g'_{01}{}^2 \cdot J_0(g'_{01}r), \\ H_r &= j\beta g'_{01} \cdot J_1(g'_{01}r), \\ E_\varphi &= -j\omega \mu g'_{01} \cdot J_1(g'_{01}r). \end{aligned}$$

На поверхности стенки магнитное поле имеет только z -ю компоненту ($H_z \neq 0$), поэтому

$$\oint_C |H|^2 dC = 2\pi a \cdot g'_{01}{}^4 J_0^2(g'_{01}a).$$

Далее, вычисление $\int_S |H|^2 dS$ удобно заменить вычислением интеграла

по S $\int_S |E|^2 dS$, так как E имеет только одну составляющую:

$$\begin{aligned} \int_S |H|^2 dS &= \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \int_S |E|^2 dS = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \omega^2 \mu_0^2 g_{01}'^2 \int_S J_1^2(g_{01}' r) 2\pi r dr = \\ &= \frac{2\pi\omega^2}{c^2} g_{01}'^2 \int_0^a J_1^2(g_{01}' r) r dr. \end{aligned}$$

Интеграл может быть вычислен и оказывается равным

$$\int_0^a J_1^2(g_{01}' r) r dr = \frac{a^2}{2} J_0^2(g_{01}' a).$$

Подставляя эти интегралы в выражение для α , получим

$$\int_S |H|^2 dS = \frac{\pi\omega^2}{c^2} g_{01}'^2 a^2 J_0^2(g_{01}' a).$$

Теперь можно вычислить α (при $\mu_m = \mu_0$):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi\delta}{2\lambda} \frac{1}{2c\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}} \frac{2\pi a \cdot g_{01}'^4 J_0^2(g_{01}' a)}{\frac{\pi\omega^2}{c^2} g_{01}'^2 a^2 J_0^2(g_{01}' a)} = \\ &= \frac{\pi\delta}{\lambda a} \frac{\frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}}. \end{aligned}$$

Из данного соотношения следует, что с уменьшением длины волны затухание убывает как $\lambda^{3/2}$ (так как $\delta \sim \lambda^{1/2}$). Это убывание является следствием того, что отсутствуют продольные токи в стенках, а поперечные токи убывают с ростом частоты.

Коротко остановимся еще на потерях в среде, заполняющей волновод, предполагая, что потери малы.

Как и прежде,

$$\alpha = \frac{P_{\text{пот1}}}{2v_{\text{гp}}W}.$$

При этом

$$P_{\text{пот1}} = \frac{\sigma}{2} \int_S |E|^2 dS,$$

где σ – проводимость среды. В то же время

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_S E^2 dS,$$

поэтому

$$\alpha = \frac{\sigma}{2v_{\text{гp}}\varepsilon} = \frac{\omega \operatorname{tg} \theta}{2c \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}},$$

где $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \operatorname{tg} \theta$.

4. ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ В РАСЧЕТАХ ВОЛНОВОДОВ

4.1. Волноводная линия передачи

До сих пор нас интересовала лишь структура полей различных мод и критические длины волн. Исследуем теперь распространение волн в волноводе.

Рассмотрим волновод, работающий в области частот, где может распространяться лишь одна основная мода. Высшие моды предполагаются нераспространяющимися и быстро затухающими.

Как было сказано ранее, решение состоит из двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях и отличающихся множителями $e^{\pm j\beta z}$.

Существование той или иной из этих волн определяется условиями возбуждения (условие излучения). Если полубесконечный волновод воз-



буждается в начале генератором, то в нем существует лишь одна волна, распространяющаяся в направлении от генератора (см. рис.).

Предположим, что в волноводе существует неоднородность, например, проводник поперек волновода. Тогда вблизи проводника основной моды недостаточно для удовлетворения граничным условиям, так как добавляется еще условие на проводнике. В общем случае граничным условиям можно удовлетворить, если записать решение в виде суммы прямой и обратной волн основной моды и высших мод с соответственно подобранными коэффициентами.

Так как поля высших мод быстро затухают, то на некотором расстоянии от неоднородности волна вновь будет представлять собой основную моду. Но при этом слева от неоднородности теперь будет две волны: прямая и отраженная, а справа по-прежнему только прошедшая падающая волна. Таким образом, обратная волна возникает вследствие отражения от неоднородностей в волноводе.

Отражение можно характеризовать коэффициентом отражения Γ , равным отношению комплексных амплитуд отраженной и падающей волн:

$$\Gamma = \frac{b}{a},$$

где a и b – амплитуды падающей и отраженной волн. Комбинация падающей и отраженных волн дает стоячую волну, характеризуемую **коэффициентом стоячей волны напряжения** (КСВН):

$$\rho = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|}.$$

Рассмотрим неоднородность, образуемую металлической пластиной, закрывающей все сечение волновода. На этой пластине поперечное электрическое поле равно нулю. Такому граничному условию можно удовлетворить с помощью суммы падающей и отраженной волн одинаковой амплитуды, взятых с обратным знаком для поперечного электрического поля. Нетрудно видеть, что поперечные составляющие магнитного поля

при этом на пластине складываются $(E_y = -j\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}, H_x = -j\beta\frac{\partial\psi}{\partial y})$.

При этом коэффициент отражения равен -1 .

Такую неоднородность естественно назвать “коротким замыканием” волновода.

Разомкнутый волновод получить достаточно трудно, так как открытый конец волновода сильно излучает в пространство. Идеальный холостой ход можно было бы получить, замыкая конец волновода пластиной из идеального магнетика с $\mu = \infty$. Того же можно достичь, закорачивая волновод пластиной на расстоянии $\Lambda/4$ от того сечения, где необходимо получить условие холостого хода.

Анализируя волны в волноводе, мы встретимся с понятиями, которые прежде были введены для ТЕМ-линий, описываемых телеграфными уравнениями. Эта аналогия может быть проведена значительно дальше. Проведение такой аналогии позволяет использовать для расчетов характеристик волноводных устройств результаты, полученные в теории цепей и ТЕМ-линий.

4.2. Телеграфные уравнения для Н-волн в волноводе

Поля в волноводе удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E}.\end{aligned}$$

Путем разделения переменных из этих уравнений можно получить телеграфные уравнения. Для этого запишем поля Н-мод в виде (учитывая, что $E_z = 0$ для Н волн)

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}^{\text{ноп}} = V(z) \cdot \vec{e}(x, y), \\ \vec{H} &= \vec{H}^{\text{ноп}} + \vec{H}_z = I(z) \cdot \vec{h}(x, y) + \vec{H}_z,\end{aligned}$$

причем векторные функции \vec{e} и \vec{h} имеют только поперечные составляющие и зависят только от поперечных координат.

Подставляя эти поля в первое уравнение Максвелла и выделяя поперечные составляющие, получим

$$[\operatorname{rot} (V \cdot \vec{e})]^{\text{ноп}} = -j\omega\mu \cdot I \cdot \vec{h}.$$

Заметим, что $\text{rot}(V \cdot \vec{e}) = V \cdot \text{rot} \vec{e} + \text{grad} V \times \vec{e}$. Первое слагаемое не имеет поперечных составляющих. Так как $\text{grad} V = \frac{dV}{dz} \cdot \vec{z}_0$, то

$$\frac{dV}{dz} \cdot \vec{z}_0 \times \vec{e} = -j\omega\mu I \cdot \vec{h}.$$

Умножим это уравнение на \vec{h} :

$$\frac{dV}{dz} \cdot (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \vec{z}_0 = -j\omega\mu \cdot (\vec{h})^2 \cdot I.$$

Подставим теперь выражения для полей во второе уравнение Максвелла:

$$\frac{dI}{dz} \cdot (\vec{z}_0 \times \vec{h}) + [\text{rot} \vec{H}_z]^{\text{поп}} = j\omega\varepsilon V \cdot \vec{e};$$

так как $\vec{h} = -\gamma \cdot \text{grad} \psi$, то $\text{rot} \vec{h} = 0$.

Заметим, что $\text{rot} \vec{H}_z$ имеет только поперечные составляющие. Кроме того,

$$\begin{aligned} \vec{H}_z &= g_m^2 \psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}, \\ \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \text{rot}(\psi \cdot \vec{z}_0 \cdot e^{-\gamma z}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\vec{E} = -\frac{j\omega\mu}{g_m^2} \text{rot} \vec{H}_z,$$

откуда

$$\text{rot} \vec{H}_z = -\frac{g_m^2}{j\omega\mu} \vec{E} = -\frac{g_m^2}{j\omega\mu} V \cdot \vec{e}.$$

Подставляя это в соответствующее уравнение и умножая на \vec{e} , получим

$$\frac{dI}{dz} (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \vec{z}_0 = -\left(\frac{g_m^2}{j\omega\mu} + j\omega\varepsilon \right) \vec{e}^2 \cdot V.$$

Проинтегрируем полученные уравнения по сечению волновода S . Величины интегралов определяются условиями нормировки.

Мощность падающей волны в волноводе равна

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{z}_0 dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} V I^* \int_S (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \vec{z}_0 dS.$$

Исходя из последнего выражения для мощности естественно принять нормировку \vec{e} и \vec{h} такой, чтобы

$$\int_S (\vec{e} \times \vec{h}) \cdot \vec{z}_0 dS = 1.$$

Далее,

$$\frac{1}{2} |V|^2 \int_S \varepsilon \vec{e}^2 dS = W_e = \frac{C_1 |V|^2}{2} —$$

электрическая энергия на единицу длины волновода. Здесь

$$C_1 = \int_S \varepsilon \vec{e}^2 dS —$$

эквивалентная емкость на единицу длины линии. Аналогично

$$W_h^{\text{поп}} = \frac{1}{2} |I|^2 \int_S \mu \vec{h}^2 dS = \frac{L_1^{\text{прод}} |I|^2}{2} —$$

магнитная энергия на единицу длины волновода, связанная с поперечными компонентами магнитного поля; здесь

$$L_1^{\text{прод}} = \int_S \mu \vec{h}^2 dS —$$

продольная индуктивность на единицу длины. Подставляя C_1 и $L_1^{\text{прод}}$ в соответствующие уравнения, получаем

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega L_1^{\text{прод}} I, \quad \frac{dI}{dz} = -j\omega C_1 V - \frac{V}{j\omega \mu \varepsilon / g_m^2 C_1}.$$

Но

$$\frac{\mu\varepsilon}{g_m^2 C_1} = \frac{1}{\omega_m^2 C_1} = L_1^{\text{поп}} —$$

поперечная индуктивность на единицу длины.

В этих обозначениях уравнения приобретают форму

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -j\omega L_1^{\text{прод}} I, \\ \frac{dI}{dz} &= -(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1^{\text{поп}}}) V. \end{aligned}$$

Это телеграфные уравнения для волн Н-типа в однородном волноводе. Аналогичным образом можно получить уравнения для Е-волн (вместо $L_1^{\text{поп}}$ нужно ввести $C_1^{\text{прод}}$).

Из полученных уравнений следует, что

$$Z_1 = j\omega L_1^{\text{прод}}, \quad Y_1 = j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1^{\text{поп}}}.$$

Необходимо отметить, что приведенное выше определение тока и напряжения в волноводе не определяет их однозначно. В самом деле, умножим напряжение на произвольный постоянный множитель, а ток разделим на такой же множитель. Тогда нормировка по мощности сохраняется. В телеграфных уравнениях Z_1 и Y_1 изменятся так, что их произведение остается прежним (т.е. постоянная распространения сохраняется), а отношение, т.е. волновое сопротивление, изменяется. Следовательно, волновое сопротивление определено неоднозначно. Например, для прямоугольного волновода (с модой H_{10}) волновое сопротивление определяют следующими способами.

Определим ток I как интеграл от продольной составляющей плотности тока на широкой стенке. Тогда волновое сопротивление определяется следующей формулой:

$$P = \frac{1}{2} |I|^2 \cdot Z_I.$$

Мощность равна

$$P = \frac{1}{2} \int_S E_x \cdot H_y^* dx dy = \frac{1}{2} \int_S A\omega\mu \sin \frac{\pi x}{a} \cdot A\beta \sin \frac{\pi x}{a} dx dy =$$

$$= \frac{\omega}{4} A^2 \omega \mu \beta.$$

Ток равен

$$I = \int_0^a H_x dx = \int_0^a A\beta \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2a}{\pi} A\beta.$$

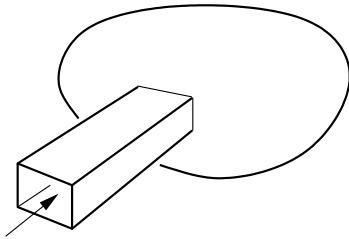
Отсюда волновое сопротивление равно

$$Z_I = \frac{2P}{|I|^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_{кр}^2}}.$$

Аналогично можно ввести волновое сопротивление через напряжение в центре волновода:

$$Z_U = \frac{|U|^2}{2P} = 2 \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_{кр}^2}}.$$

4.3. Оконечное устройство (двухполюсник)



Предположим, что к концу волновода присоединено замкнутое электродинамическое устройство (см. рис.). Для замкнутой поверхности, окружающей оконечное устройство, справедлива теорема Пойнтинга

$$\frac{1}{2} \oint_S (\vec{E} \vec{H}^*) \vec{n} dS = P + 2j\omega (W_h - W_e).$$

Так как поля везде, кроме сечения волновода, равны нулю, то поверхностный интеграл обращается в интеграл по сечению волновода. Подставляя \vec{E} и \vec{H} и учитывая условие нормировки, получим

$$\frac{1}{2} U \cdot I^* = P + 2j\omega (W_h - W_e).$$

Данное соотношение аналогично полученному в теории цепей и позволяет ввести полное сопротивление и проводимость.

4.3.1. Полное сопротивление и проводимость

Введем полное сопротивление и полную проводимость следующим образом:

$$Z = \frac{U}{I}, \quad Y = \frac{I}{U}.$$

Полученное соотношение позволяет найти энергетические выражения для этих величин. А именно, подставляя $U = ZI$, получим

$$\frac{1}{2}|I|^2 Z = P + 2j\omega(W_h - W_e),$$

откуда

$$Z = \frac{P + 2j\omega(W_h - W_e)}{\frac{1}{2}|I|^2} = R + jX.$$

Аналогично этому, подставляя $I = YU$, получим

$$Y = \frac{P + 2j\omega(W_e - W_h)}{\frac{1}{2}|U|^2} = G + jB.$$

Из этих соотношений имеем

$$\begin{aligned} Z^*(j\omega) &= Z(-j\omega), & R &= \operatorname{Re} Z = \frac{Z(j\omega) + Z(-j\omega)}{2}, \\ & & X &= \operatorname{Im} Z = \frac{Z(j\omega) - Z(-j\omega)}{2j}, \\ Y^*(j\omega) &= Y(-j\omega), & G &= \operatorname{Re} Y = \frac{Y(j\omega) + Y(-j\omega)}{2}, \\ & & B &= \operatorname{Im} Y = \frac{Y(j\omega) - Y(-j\omega)}{2j}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что R, G – четные функции частоты, X, B – нечетные функции частоты. Кроме того:

1. $R \geq 0$, так как $P \geq 0$.
2. Если $P = 0$, то Z – чисто мнимая величина.
3. Если $W_h - W_e = 0$, то $X = 0$ или $B = 0$, что соответствует резонансу.

Рассмотрим падающую и отраженную волны на зажимах оконечного устройства. Обозначим комплексные амплитуды падающей и отраженной волн через a и b . Коэффициент отражения определим как

$$\Gamma = \frac{b}{a}.$$

При этом мощности падающей и отраженной волн равны

$$P_{\text{пад}} = \frac{1}{2} |a|^2, \quad P_{\text{отр}} = \frac{1}{2} |b|^2.$$

Так как электрические поля падающей и отраженной волн складываются, а магнитные – вычитаются, то

$$\begin{aligned} U &= p(a + b) = pa(1 + \Gamma), \\ I &= \frac{1}{p}(a - b) = \frac{1}{p}a(1 - \Gamma). \end{aligned}$$

Множители p и $1/p$ обратны в силу нормировки по отношению к мощности. Отсюда сопротивление оконечного устройства равно

$$Z = \frac{U}{I} = p^2 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}.$$

При $\Gamma = 0$ должно быть $Z = Z_0$, откуда $p^2 = Z_0$.

Решая относительно Γ , получим

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}.$$

Как указано выше, выбор волнового сопротивления неоднозначен. В ряде случаев удобно выбирать ток и напряжение так, чтобы волновое сопротивление было равно единице, т.е., по существу, нормировать сопротивление нагрузки на волновое сопротивление. Тогда

$$z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \quad \Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Аналогично – для проводимости.

При любом p , подставляя напряжение и ток в выражение для $U \cdot I^*$, получим

$$(1 + \Gamma)(1 - \Gamma^*) \frac{1}{2} |a|^2 = P + 2j\omega(W_e - W_h),$$

откуда

$$(1 + \Gamma)(1 - \Gamma^*) = \frac{P + 2j\omega(W_e - W_h)}{\frac{1}{2}|a|^2},$$

Разделяя вещественные и мнимые части, получим

$$1 - \Gamma \cdot \Gamma^* = \frac{P}{\frac{1}{2}|a|^2},$$

$$(\Gamma - \Gamma^*) = \frac{2j\omega(W_e - W_h)}{\frac{1}{2}|a|^2}.$$

Так как $P \geq 0$, то $\Gamma \cdot \Gamma^* \leq 1$ и $|\Gamma| \leq 1$. Полученные выше соотношения позволяют найти Γ :

$$\Gamma = \sqrt{1 - P'} \cdot e^{j\varphi},$$

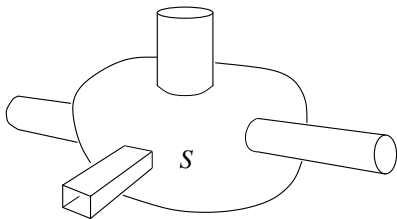
причем

$$\sin \varphi = \frac{\text{Im } \Gamma}{|\Gamma|}, \quad P' = \frac{P}{\frac{1}{2}|a|^2}.$$

4.4. Соединение нескольких волноводов

Полученные результаты могут быть обобщены на случай, когда соединены несколько волноводных линий передачи, причем в общем случае

волноводы могут иметь различные сечения.



Пусть дано соединение N волноводов. Это соединение поместим в замкнутую поверхность S , пересекающую все волноводы по плоскостям, перпендикулярным их осям (см. рис.). Использование комплексной теоремы Пойнтинга с учетом нормировки поперечных векторных функций дает в этом случае

$$\frac{1}{2} \sum_n U_n \cdot I_n^* = P + 2j\omega (W_h - W_e),$$

где P – средняя рассеиваемая в соединении мощность, W_h и W_e – средние запасы энергии магнитного и электрического полей, n – номер входа.

4.4.1. Матрицы сопротивления и проводимости

Из линейности уравнений Максвелла следует линейная зависимость напряжений от токов

$$U_n = \sum_m Z_{nm} I_m.$$

Коэффициенты Z_{nm} образуют матрицу

$$Z = \{Z_{nm}\},$$

называемую матрицей полного входного сопротивления многополюсника.

Указанное выше соотношение может быть записано в матричной форме

$$U = Z I,$$

где $U (U_1, U_2, \dots, U_N)$ и $I (I_1, I_2, \dots, I_N)$ – совокупности напряжений и токов входов. Это соотношение может быть обращено:

$$I = Y U,$$

где $Y = \{Y_{nm}\}$ – матрица полной проводимости. Очевидно, что $Y = Z^{-1}$.

Полученное выше соотношение может быть записано в виде

$$\frac{1}{2} U I^* = P + 2j\omega (W_h - W_e)$$

или, подставляя $U = Z I$,

$$\frac{1}{2} I^* Z I = P + 2j\omega (W_h - W_e).$$

4.4.2. Симметрия матрицы сопротивления (проводимости)

Матрицы полного сопротивления и полной проводимости обладают важным свойством симметрии. Это свойство может быть доказано с помощью леммы Лоренца.

Предположим, что в некоторой области V известны два решения однородных уравнений Максвелла при одной и той же частоте. Все величины, соответствующие этим решениям, будем обозначать индексами 1 и 2 сверху.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)}) - \operatorname{div}(\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) &= \vec{H}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(2)} - \\ &- \vec{H}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(1)} \end{aligned}$$

Правая часть в силу уравнений Максвелла равна

$$-j\omega \vec{H}^{(2)} \mu \vec{H}^{(1)} - j\omega \vec{E}^{(1)} \varepsilon \vec{E}^{(2)} + j\omega \vec{H}^{(1)} \mu \vec{H}^{(2)} + j\omega \vec{E}^{(2)} \varepsilon \vec{E}^{(1)}$$

и обращается в нуль, если μ и ε – скаляры или симметричные тензоры¹.

Итак, получаем равенство

$$\operatorname{div}(\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)}) - \operatorname{div}(\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) = 0,$$

¹ Величины μ и ε могут быть комплексными, если присутствуют потери в стенках и среде, заполняющей пространство.

которое является выражением леммы Лоренца в дифференциальной форме.

Интегрируя по объему V , ограниченному поверхностью S , переведем эту лемму в интегральную форму (преобразуя объемный интеграл в поверхностный):

$$\oint_S \{ \vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)} - \vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)} \} \vec{n} dS = 0.$$

Выберем поверхность S так, чтобы она охватывала волноводное сочленение снаружи, пересекая волноводы по плоскостям, перпендикулярным оси волноводов. Выражая поле в волноводах через напряжения и токи и учитывая нормировку векторных функций, получим следующее равенство:

$$\sum_n [U_n^{(1)} \cdot I_n^{(2)} - U_n^{(2)} \cdot I_n^{(1)}] = 0.$$

Здесь n – номер волновода. Данное уравнение справедливо для любых двух совокупностей напряжений и соответствующих токов, приложенных к зажимам соединения.

Полученное уравнение можно записать в матричной форме:

$$U^{(1)} I^{(2)} - U^{(2)} I^{(1)} = 0.$$

Здесь U и I – совокупности (матрицы) напряжений и токов. С другой стороны, напряжения и токи связаны матричным соотношением

$$U = Z I.$$

Подставляя это в написанное выше уравнение, получим

$$I^{(2)} Z I^{(1)} - I^{(1)} Z I^{(2)} = 0.$$

Переставляя сомножители в первом слагаемом, согласно известному свойству матриц получим

$$I^{(1)} Z^T I^{(2)} - I^{(1)} Z I^{(2)} = 0,$$

где Z^T – транспонированная матрица. Так как полученное соотношение выполняется для произвольных токов $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$, то из этого следует, что

$Z^* = Z$, т.е. матрица Z действительно симметрична. Условием этого является справедливость леммы Лоренца, для чего необходимо и достаточно, чтобы μ и ε среды были либо скалярами, либо симметричными тензорами. Симметрия матрицы полного сопротивления Z является выражением известного принципа взаимности.

Аналогично может быть доказано свойство симметрии матрицы проводимости Y .

4.4.3. Многополюсное сочленение без потерь

Во многих случаях сочленение обладает настолько малыми потерями, что ими можно пренебречь и рассматривать сочленение без потерь. В этом случае, как увидим дальше, все элементы матрицы сопротивления (и проводимости) представляют собой чисто мнимые величины.

Будем исходить из найденного выше соотношения

$$\frac{1}{2} I^* Z I = \frac{1}{2} \sum_{n,m} I_n^* Z_{nm} I_m = P + 2j\omega (W_h - W_e).$$

В случае устройства без потерь $P = 0$ и

$$\frac{1}{2} \sum_{n,m} I_n^* Z_{nm} I_m = 2j\omega (W_h - W_e),$$

т.е. сумма является чисто мнимой. Покажем, что в этом случае все элементы Z_{nm} чисто мнимые. Для этого рассмотрим такой режим, когда все зажимы, кроме одного, разомкнуты, т.е. все $I_n = 0$, кроме одного тока $I_k \neq 0$. Тогда приведенная выше сумма сводится к одному слагаемому:

$$\frac{1}{2} Z_{kk} I_k^* I_k = 2j\omega (W_h - W_e),$$

откуда следует, что все диагональные элементы Z_{kk} — чисто мнимые.

Теперь рассмотрим режим, когда все I_n равны нулю, кроме двух токов $I_k \neq 0$ и $I_m \neq 0$. Тогда в сумме остается четыре члена:

$$\frac{1}{2} \{ I_k I_k^* Z_{kk} + I_m I_m^* Z_{mm} + I_m^* Z_{mk} I_k + I_k^* Z_{km} I_m \} = 2j\omega (W_h - W_e).$$

Если $Z_{mk} = Z_{km}$, то для выполнения этого равенства должно быть

$$\operatorname{Re} (I_m^* I_k + I_k^* I_m) Z_{mk} = 0.$$

Так как сумма $I_m^* I_k + I_k^* I_m$ вещественна, то из этого равенства следует, что

$$\operatorname{Re} Z_{mk} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что в данном случае все элементы матрицы проводимости также мнимы.

4.4.4. Вариация матрицы сопротивления (проводимости) сочленения без потерь

Элементы матрицы полного сопротивления (проводимости) являются функционалами векторных функций электрического и магнитного полей. Если варьировать функции полей, то элементы матрицы сопротивления также будут варьироваться.

Для вычисления их вариации будем исходить из соотношения

$$I^* Z I = 4j\omega (W_h - W_e) = j\omega \int_V (\mu |H|^2 - \varepsilon |E|^2) dV,$$

где

$$W_h = \frac{1}{2} \int_V \frac{\mu |H|^2}{2} dV, \quad W_e = \frac{1}{2} \int_V \frac{\varepsilon |E|^2}{2} dV.$$

Здесь интеграл берется по объему V , ограниченному поверхностью S , совпадающей с внутренней поверхностью сочленения и пересекающей волноводы по плоскостям, перпендикулярным осям волноводов.

Предположим, что варьируется только магнитное поле, а электрическое изменяется в зависимости от магнитного согласно второму уравнению Максвелла

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \vec{H}.$$

Подставим это в приведенное выше соотношение

$$\begin{aligned}
I^* ZI &= j\omega \int_V \left(\mu |\vec{H}|^2 - \frac{\varepsilon}{\omega^2 \varepsilon^2} |\operatorname{rot} \vec{H}|^2 \right) dV = \\
&= \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_V \left(k^2 |\vec{H}|^2 - |\operatorname{rot} \vec{H}|^2 \right) dV = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_V \left(k^2 \vec{H} \vec{H}^* - \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}^* \right) dV.
\end{aligned}$$

Возьмем теперь вариацию правой и левой частей:

$$\begin{aligned}
\delta I^* ZI + I^* \delta ZI + I^* Z \delta I &= \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_V \left(k^2 \vec{H} \cdot \delta \vec{H}^* + k^2 \delta \vec{H} \cdot \vec{H}^* - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{rot} \delta \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}^* - \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H}^* \right) dV.
\end{aligned}$$

Воспользуемся векторным тождеством

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H} \times \delta \vec{H}^*) = \delta \vec{H}^* \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} - \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H}^*,$$

из которого следует, что

$$-\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H}^* = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H} \times \delta \vec{H}^*) - \delta \vec{H}^* \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H},$$

$$-\operatorname{rot} \vec{H}^* \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{H}^* \times \delta \vec{H}) - \delta \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}^*.$$

Подставляя это в уравнение вариаций, получим

$$\begin{aligned}
\delta I^* ZI + I^* \delta ZI + I^* Z \delta I &= \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_V \left[(k^2 \vec{H} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \delta \vec{H}^* + \right. \\
&+ \left. (k^2 \vec{H}^* - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}^*) \cdot \delta \vec{H} \right] dV - \oint_S \left[(\operatorname{rot} \vec{H} \times \delta \vec{H}^*) \vec{n} + (\operatorname{rot} \vec{H}^* \times \delta \vec{H}) \vec{n} \right] dS.
\end{aligned}$$

Здесь \vec{n} – внутренняя по отношению к поверхности единичная нормаль. Учитывая, что $\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E}$, правую часть этого равенства можно преобразовать:

$$\delta I^* ZI + I^* \delta ZI + I^* Z \delta I = \frac{j}{\omega \varepsilon} \int_V \left[(k^2 \vec{H} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \delta \vec{H}^* + \right.$$

$$+ (k^2 \vec{H}^* - \text{rot rot } \vec{H}^*) \cdot \delta \vec{H} \Big] dV + \oint_S [\vec{E} \times \delta \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \delta \vec{H}] \vec{n} dS.$$

Покажем теперь, что если \vec{H} удовлетворяет уравнению

$$k^2 \vec{H} - \text{rot rot } \vec{H} = 0$$

и граничному условию

$$\text{rot } \vec{H} \times \vec{n} = 0, \text{ или } \vec{E} \times \vec{n} = 0$$

(что одно и то же), то вариация $\delta Z = 0$. Действительно, в этом случае объемный интеграл в правой части написанного выше равенства обращается в нуль. Часть поверхностного интеграла, взятая по внутренней поверхности сочленения, обращается в нуль в силу граничных условий, остальная часть этого интеграла превращается в сумму интегралов по поперечным сечениям волноводов. Выражая поле в волноводах через напряжения и токи, получим в итоге следующее равенство:

$$\delta I^* Z I + I^* \delta Z I + I^* Z \delta I = \delta I^* Z I - I^* Z^* \delta I.$$

Но для сочленения без потерь $Z^* = -Z$. Подставляя в правую часть равенства и приводя подобные члены в правой и левой части, получаем искомое равенство

$$I^* \delta Z I = 0.$$

Вследствие произвольности токов отсюда следует $\delta Z = 0$.

Итак, вариация матрицы сопротивления обращается в нуль при следующих условиях:

1. Поле \vec{H} удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$k^2 \vec{H} - \text{rot rot } \vec{H} = 0.$$

2. Тангенциальная составляющая $\text{rot } \vec{H}$ или, что равносильно, тангенциальная составляющая электрического поля \vec{E} равна нулю.

Но это значит, что \vec{H} является решением уравнений Максвелла при стандартных граничных условиях. Следовательно, решение электродинамической задачи сообщает матрице сопротивления Z , рассматриваемой как функционал, стационарное значение. Заметим, что электродинамические граничные условия в данном случае являются естественными граничными условиями соответствующей вариационной задачи.

Аналогично может быть рассмотрен случай вариации электрического поля. При этом получается соотношение, которое определяет вариацию матрицы сопротивлений:

$$\delta I^* Z I + I^* \delta Z I + I^* Z \delta I = \frac{j}{\omega \mu} \int_V \left[(k^2 \vec{E} - \text{rot rot } \vec{E}) \cdot \delta \vec{E}^* + \right. \\ \left. + (k^2 \vec{E}^* - \text{rot rot } \vec{E}) \cdot \delta \vec{E} \right] dV + \oint_S \left[\vec{H} \times \delta \vec{E}^* + \vec{H}^* \times \delta \vec{E} \right] \vec{n} dS.$$

Для того чтобы в этом случае вариация δZ обратилась в нуль, электрическое поле \vec{E} должно удовлетворять уравнению Гельмгольца. Кроме того, тангенциальная составляющая вариации $\delta \vec{E}$ должна обращаться в нуль на поверхности сочленения. При этом, как видим, не накладывается граничное условие на само поле \vec{E} . Этому условию функция \vec{E} должна удовлетворять в силу требований электродинамики, но не обращения в нуль вариации матрицы сопротивления. В этом состоит различие с предыдущим случаем.

Далее процедура та же, что и в предыдущем случае.

Итак, в данном случае вариация матрицы сопротивления обращается в нуль при следующих условиях:

1. Электрическое поле \vec{E} удовлетворяет уравнению Гельмгольца.
2. Вариация $\delta \vec{E}$ имеет равную нулю на внутренней поверхности S сочленения тангенциальную составляющую.

Таким образом, удовлетворение граничным условиям функцией \vec{E} не входит в число условий, необходимых для обращения в нуль вариации матрицы сопротивления. В данном случае электродинамические граничные условия не являются естественными граничными условиями вариационной задачи (а являются так называемыми главными граничными условиями).

4.4.5. Обобщение на случай волноводов, по которым могут распространяться волны нескольких мод

До сих пор рассмотрение ограничивалось волноводами, по которым распространяется лишь одна (основная) мода. Возможно обобщение на случай любого числа распространяющихся мод.

Данное обобщение производится путем введения напряжений и токов, соответствующих каждой распространяющейся моде. При этом основные соотношения не изменяются благодаря тому, что поля различных мод в волноводе ортогональны, что приводит к исчезновению перекрестных интегралов типа

$$\int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_k) \vec{z}_0 dS \quad \text{при } m \neq k,$$

где S – поперечное сечение волновода, \vec{z}_0 – единичный вектор в направлении оси z .

Волновод, по которому может распространяться N различных мод, эквивалентен N парам зажимов.

4.4.6. Матрица рассеяния

Кроме описания поля в многополюснике с помощью напряжений и токов, возможно также волновое описание, т.е. описание с помощью амплитуд входящих и выходящих волн.

Напряжения и токи могут быть выражены через сумму и разность амплитуд входящей и выходящей волн:

$$\begin{aligned} U_n &= p_n(a_n + b_n), \\ I_n &= \frac{1}{p_n}(a_n - b_n). \end{aligned}$$

Величина p_n связана с волновым сопротивлением волновода. Действительно, как было показано ранее,

$$p_n^2 = Z_{0n},$$

откуда $p_n = \sqrt{Z_{0n}}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все волновые сопротивления выбраны равными единице. Тогда

$$\begin{aligned} U_n &= a_n + b_n, \\ I_n &= a_n - b_n, \end{aligned}$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{2}(U_n + I_n),$$

$$b_n = \frac{1}{2}(U_n - I_n).$$

Между напряжениями и токами имеет место соотношение

$$U_n = \sum_m Z_{nm} I_m.$$

Подставляя это в выражения для a_n и b_n , найдем

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\sum_m Z_{nm} I_m + I_n \right) = \frac{1}{2} \sum_m (Z_{nm} + \delta_{nm}) I_m,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\sum_m Z_{nm} I_m - I_n \right) = \frac{1}{2} \sum_m (Z_{nm} - \delta_{nm}) I_m,$$

где

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 1 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

В матричной форме эти соотношения записываются следующим образом:

$$a = \frac{1}{2}(Z + 1)I,$$

$$b = \frac{1}{2}(Z - 1)I.$$

Найдем из первого соотношения ток I :

$$I = 2(Z + 1)^{-1}a.$$

Подставляя это в выражение для b , получим

$$b = (Z - 1)(Z + 1)^{-1}a.$$

Матрица

$$S = (Z - 1)(Z + 1)^{-1},$$

связывающая выходящие волны с входящими, называется матрицей рассеяния. Можно показать, что матрица рассеяния может быть выражена также через матрицу проводимости:

$$S = (1 - Y)(1 + Y)^{-1}.$$

Диагональные элементы матрицы рассеяния – это коэффициенты отражения при отсутствии входящих волн во всех волноводах, кроме данного, т.е. когда все волноводы, кроме питаемого, нагружены на согласованные нагрузки. Недиagonальные элементы – это коэффициенты передачи при тех же условиях.

4.4.7. Свойства матрицы рассеяния

Симметрия

Умножим матрицу рассеяния слева на $(Z + 1)$:

$$(Z + 1) \cdot S = (Z + 1)(Z - 1)(Z + 1)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что матрицы $Z + 1$ и $Z - 1$ коммутативны. Это можно проверить умножением. Переставляя сомножители в правой части равенства, получим

$$(Z + 1)S = (Z - 1)(Z + 1)(Z + 1)^{-1}$$

или, объединяя два последних множителя,

$$(Z + 1)S = Z - 1.$$

Умножая теперь слева на $(Z + 1)^{-1}$, находим

$$S = (Z + 1)^{-1}(Z - 1).$$

Таким образом, матрицы $Z - 1$ и $(Z + 1)^{-1}$ коммутативны. Отметим, что эти матрицы симметричны. Из теории матриц известно, что матрица, являющаяся произведением двух симметричных матриц, коммутирующих между собой, симметрична. Следовательно, матрица рассеяния также симметрична, что записывается в виде соотношения

$$S^T = S,$$

где S^T – транспонированная матрица.

Симметрия матрицы рассеяния является следствием симметрии матрицы сопротивления (или матрицы проводимости).

4.4.8. Энергетические соотношения

Подставляя в найденное ранее соотношение выражения напряжений и токов через амплитуды волн, получим

$$\frac{1}{2} \sum_n (a_n + b_n)(a_n^* - b_n^*) = P + 2j\omega (W_h - W_e)$$

или, раскрывая скобки,

$$\frac{1}{2} \sum_n (a_n a_n^* - b_n b_n^* + a_n^* b_n - a_n b_n^*) = P + 2j\omega (W_h - W_e).$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \sum_n (a_n a_n^* - b_n b_n^*) &= 2P, \\ \sum_n (a_n^* b_n - a_n b_n^*) &= 4j\omega (W_h - W_e). \end{aligned}$$

Данные соотношения могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{aligned} a \cdot a^* - b \cdot b^* &= 2P, \\ a^* \cdot b - a \cdot b^* &= 4j\omega (W_h - W_e). \end{aligned}$$

Если в сочленении отсутствуют потери, т.е. $P = 0$, то первое соотношение может быть записано в виде

$$|a|^2 = |b|^2,$$

что выражает закон сохранения энергии: мощность входящих волн равна мощности выходящих.

В первом соотношении амплитуды выходящих волн могут быть выражены через амплитуды входящих с помощью матрицы рассеяния:

$$a \cdot a^* - Sa \cdot S^* a^* = 2P.$$

Перестановка во втором слагаемом с заменой S^* на S^{*T} , т.е. на транспонированную матрицу, дает

$$a^*(1 - S^{*T} \cdot S)a = 2P.$$

Здесь 1 – единичная матрица, элементы которой равны δ_{ik} (символ Кронекера).

Если $P = 0$, то

$$1 - S^{*T} \cdot S = 0,$$

или

$$S^{*T} \cdot S = 1.$$

Матрицу, удовлетворяющую такому соотношению, называют унитарной. Перечислим основные свойства унитарной матрицы.

1. Как показано выше, матрица сохраняет сумму квадратов входящих и выходящих волн:

$$\sum_n |a_n|^2 = \sum_n |b_n|^2.$$

2. Из равенства $S^{*T} \cdot S = 1$ следует

$$(S^{*T} \cdot S)_{ik} = \sum_m S_{im}^{*T} \cdot S_{mk} = \sum_m S_{mi}^* \cdot S_{mk} = \delta_{ik}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_m S_{im}^* \cdot S_{km} = \delta_{ik}.$$

3. Модуль определителя равен 1.
4. Обратная матрица равна эрмитово сопряженной.

Заметим, что эти соотношения получены без предположения о симметрии матрицы рассеяния. Они справедливы, в частности, для ферритовых циркуляторов.

Второе соотношение дает

$$a^* \cdot Sa - a \cdot S^* a^* = 4j\omega (W_h - W_e)$$

или, после перестановки во втором слагаемом в правой части

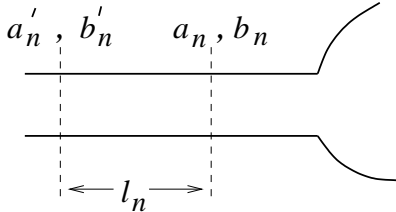
$$a^* \cdot (S - S^{*T})a = 4j\omega (W_h - W_e).$$

В частности, если S – симметричная матрица, то получим

$$a^* \cdot (S - S^*)a = 4j\omega (W_h - W_e).$$

Матрица $S - S^*$ – чисто мнимая.

4.4.9. Преобразование матрицы рассеяния при переносе отсчетных плоскостей



Рассмотрим перенос отсчетных плоскостей во всех волноводах на расстояния l_n в сторону от сочленения к генератору (см. рис.). До переноса мы имеем соотношение $b = Sa$. Для новых плоскостей отсчета аналогичное соотношение примет вид $b' = S'a'$. Для a_n, b_n, a'_n, b'_n имеем

$$a'_n = a_n e^{j\beta_n l_n}, \quad b'_n = b_n e^{-j\beta_n l_n},$$

откуда

$$a'_n = a_n e^{j\beta_n l_n}, \quad b_n = b'_n e^{j\beta_n l_n}.$$

Введем диагональную матрицу L :

$$L = \begin{pmatrix} e^{j\beta_1 l_1} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & e^{j\beta_n l_n} \end{pmatrix}$$

С помощью этой матрицы запишем приведенные выше соотношения:

$$a' = La, \quad b = Lb',$$

или

$$a = L^{-1}a', \quad b = Lb'.$$

Подставляя это в соотношение, связывающее амплитуды входящих и выходящих волн, получим

$$Lb' = S \cdot L^{-1}a' \quad \text{или} \quad b' = L^{-1}S \cdot L^{-1}a'.$$

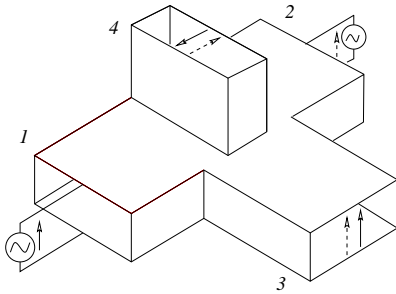
Отсюда следует, что

$$S' = L^{-1}SL^{-1}.$$

Данная формула дает преобразование матрицы рассеяния при переносе отсчетных плоскостей.

4.4.10. Двойной тройник

В измерительной технике часто применяется двойной тройник, составленный из прямоугольных волноводов с основной модой H_{10} (см. рис.). Такой тройник обладает некоторыми интересными свойствами.



Для выяснения этих свойств воспользуемся матрицей рассеяния с учетом свойств симметрии двойного тройника. Двойной тройник является восьмиполюсником и имеет, следовательно, матрицу рассеяния четвертого порядка. Так как предполагается, что стенки волноводов идеально проводящие, то матрица рассеяния двойного тройника унитарна.

Из симметрии двойного тройника следует

$$S_{11} = S_{22}, \quad S_{13} = S_{23}, \quad S_{14} = -S_{24}, \quad S_{34} = S_{43} = 0.$$

Кроме того, из симметрии матрицы рассеяния следует, что

$$S_{12} = S_{21}, \quad S_{13} = S_{31}, \quad S_{14} = -S_{41}, \quad S_{23} = S_{32}, \quad S_{24} = S_{42}, \quad S_{34} = -S_{43}.$$

Таким образом, матрица рассеяния имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & S_{44} \end{array} \right\|$$

Так как матрица рассеяния унитарна, то

$$\sum_i S_{ik} \cdot S_{il}^* = \delta_{kl}, \quad \sum_i S_{ki} \cdot S_{li}^* = \delta_{kl}.$$

Установим некоторые свойства двойного тройника.

1. Если тройник согласован со стороны плеч 3 и 4, то между боковыми плечами отсутствует непосредственная связь. В этом случае боковые плечи также согласованы.

Чтобы показать это, составим суммы произведений элементов первой и третьей строк, а также произведений элементов второй и четвертой строк:

$$\begin{aligned} S_{11} S_{13}^* + S_{12} S_{13}^* + S_{13} S_{33}^* &= 0, \\ S_{12} S_{14}^* - S_{11} S_{14}^* - S_{14} S_{44}^* &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем два уравнения

$$\begin{aligned} S_{11} + S_{12} &= -\frac{S_{13}}{S_{13}^*} S_{33}^*, \\ S_{11} - S_{12} &= -\frac{S_{14}}{S_{14}^*} S_{44}^*, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{S_{13}}{S_{13}^*} S_{33}^* + \frac{S_{14}}{S_{14}^*} S_{44}^* \right), \\ S_{12} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{S_{13}}{S_{13}^*} S_{33}^* - \frac{S_{14}}{S_{14}^*} S_{44}^* \right), \end{aligned}$$

Если $S_{33} = S_{44} = 0$, то из этого следует, что $S_{11} = 0$ и $S_{12} = 0$.

Выбором плоскостей отсчета в плечах 3 и 4 всегда можно сделать S_{13} и S_{14} вещественными величинами. Тогда

$$\begin{aligned} S_{11} &= -\frac{1}{2}(S_{33}^* + S_{44}^*), \\ S_{12} &= -\frac{1}{2}(S_{33}^* - S_{44}^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что S_{11} и S_{12} одновременно равны нулю только при условии, что $S_{33} = 0$ и $S_{44} = 0$. Если S_{33} и S_{44} отличны от нуля, то в нуль можно обратить лишь одну из указанных величин.

2. Возьмем теперь суммы квадратов модулей третьей и четвертой строк матрицы рассеяния (при условии $S_{33} = S_{44} = 0$)

$$\begin{aligned} |S_{13}|^2 + |S_{13}|^2 &= 1, \\ |S_{14}|^2 + |S_{14}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$|S_{13}| = |S_{14}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом: при условии $S_{33} = S_{44} = 0$ в двойном тройнике мощность волны, поданной в боковое плечо, делится поровну между плечами 3 и 4.

Двойной тройник, у которого $S_{33} = S_{44} = 0$ и, следовательно, $S_{11} = 0$, $S_{22} = 0$ и $S_{12} = S_{21} = 0$, называют согласованным. В этом случае матрица рассеяния имеет особенно простой вид, так как

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = S_{34} = S_{43} = 0$$

и

$$S_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда имеем

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Согласованный двойной тройник находит применение в измерительной технике, так как позволяет производить измерение коэффициента отражения оконечных устройств.

Предположим, что волна амплитуды a_3 подается в плечо 3. К плечу 2 присоединим согласованную нагрузку, а к плечу 1 – измеряемую. Найдем амплитуду волны, поступающей в плечо 4:

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2).$$

В то же время $a_2 = 0$, так как к плечу 2 присоединена согласованная нагрузка. Величина a_1 определяется коэффициентом отражения от нагрузки Γ :

$$a_1 = \Gamma b_1.$$

Но

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 - a_4).$$

Предположим, что в плече 4 установлен согласованный индикатор. Тогда $a_4 = 0$ и

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} a_3.$$

Подставляя это в выражение для a_1 , получим

$$a_1 = \Gamma \frac{1}{\sqrt{2}} a_3, \text{ и } b_4 = \frac{1}{2} \Gamma a_3.$$

Таким образом, амплитуда волны на выходе 4-го плеча пропорциональна коэффициенту отражения в плече 1.

Можно показать, что если к плечам 1 и 2 присоединены одинаковые (хотя бы и не согласованные) нагрузки, то волна на выходе плеча 4 равна нулю. Это свойство используется для измерения полных сопротивлений.

4.5. Частотные свойства

4.5.1. Частотная зависимость матрицы сопротивления (проводимости) сочленения без потерь

Для сочленения без потерь уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}.$$

Предполагается, что μ и ε не зависят от частоты. Продифференцируем эти уравнения по частоте:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} &= -j\mu\vec{H} - j\omega\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega}, \\ \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} &= j\varepsilon\vec{E} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Умножим первое равенство скалярно на \vec{H}^* , а второе – на \vec{E}^* и вычтем первое из второго. Тогда (предполагая μ и ε скалярами или симметричными тензорами) получим

$$\begin{aligned} \vec{H}^* \cdot \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} - \vec{E}^* \cdot \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} &= -j(\mu|\vec{H}|^2 + \varepsilon|\vec{E}|^2) - \\ &- \operatorname{rot} \vec{E}^* \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} + \operatorname{rot} \vec{H}^* \frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Далее, перенося последние два слагаемых из правой части в левую, получим

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} \times \vec{H}^* \right) + \operatorname{div} \left(\vec{E}^* \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} \right) = -j(\mu|\vec{H}|^2 + \varepsilon|\vec{E}|^2).$$

Проинтегрируем теперь это равенство по объему внутри поверхности, охватывающей все сочленение и пересекающей волноводы по плоскостям, перпендикулярным их осям. При этом объемный интеграл от дивергенции переходит в поверхностный. Меняя внешнюю нормаль на внутреннюю, получим

$$\oint_S \left\{ \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial \omega} \times \vec{H}^* \right) + \left(\vec{E}^* \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial \omega} \right) \right\} \cdot \vec{n} dS = \int_V j(\mu|\vec{H}|^2 + \varepsilon|\vec{E}|^2) dV.$$

Здесь \vec{n} – внутренняя нормаль. Если теперь выразить поля через напряжения и токи, то найдем, что

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} I^* + U^* \frac{\partial I}{\partial \omega} = 4j(W_H + W_E).$$

Здесь U и I – совокупности напряжений и токов во всех волноводах, $W_H = \frac{1}{2} \int_V \frac{\mu |H|^2}{2} dV$ и $W_E = \frac{1}{2} \int_V \frac{\varepsilon |E|^2}{2} dV$ – средние запасы магнитной и электрической энергии в объеме сочленения. Напряжения выражаются через токи с помощью матрицы сопротивления

$$U = Z I,$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial Z}{\partial \omega} I + Z \frac{\partial I}{\partial \omega}.$$

Подставляя это в записанные выше уравнения, получим

$$I^* \frac{\partial Z}{\partial \omega} I + I^* Z \frac{\partial I}{\partial \omega} + \frac{\partial I}{\partial \omega} Z^* I^* = 4j (W_H + W_E).$$

или, учитывая что $Z^* = -Z$ для сочленения без потерь,

$$I^* \frac{\partial Z}{\partial \omega} I + I^* Z \frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial \omega} Z I^* = 4j (W_H + W_E).$$

С учетом симметрии матрицы сопротивлений два последние слагаемые в левой части равенства взаимно уничтожаются, в результате чего получаем

$$I^* \frac{\partial Z}{\partial \omega} I = 4j (W_H + W_E).$$

Аналогичное соотношение можно получить для матрицы проводимостей

$$U^* \frac{\partial Y}{\partial \omega} U = 4j (W_H + W_E).$$

Заметим, что матрицы $\frac{\partial Z}{\partial \omega}$ и $\frac{\partial Y}{\partial \omega}$ составлены из элементов $\frac{\partial Z_{mn}}{\partial \omega}$ и $\frac{\partial Y_{mn}}{\partial \omega}$.

Будем исходить из полученного выше соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} I^* + U^* \frac{\partial I}{\partial \omega} = 4j(W_H + W_E).$$

Так как $U = a + b$, $I = a - b$, то, подставляя это, получаем

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \omega} + \frac{\partial b}{\partial \omega} \right) (a^* - b^*) + (a^* + b^*) \left(\frac{\partial a}{\partial \omega} - \frac{\partial b}{\partial \omega} \right) = 4j(W_H + W_E).$$

Раскрывая скобки и сокращая, найдем

$$a^* \frac{\partial a}{\partial \omega} - b^* \frac{\partial b}{\partial \omega} = 2j(W_H + W_E).$$

Далее, $b^* = S^* a^*$, $\frac{\partial b}{\partial \omega} = \frac{\partial S}{\partial \omega} a + S \frac{\partial a}{\partial \omega}$. Подставляя это, получим

$$a^* \frac{\partial a}{\partial \omega} - S^* a^* \left(\frac{\partial S}{\partial \omega} a + S \frac{\partial a}{\partial \omega} \right) = a^* \frac{\partial a}{\partial \omega} - \frac{\partial S}{\partial \omega} a S^* a^* - S^* a^* S \frac{\partial a}{\partial \omega}.$$

Так как S и $\frac{\partial S}{\partial \omega}$ — симметричные матрицы, то в последних двух слагаемых в правой части можно совершить перестановку:

$$a^* \frac{\partial a}{\partial \omega} - a^* S^* \frac{\partial S}{\partial \omega} a - \frac{\partial a}{\partial \omega} S S^* a^* = -a^* S^* \frac{\partial S}{\partial \omega} a,$$

так как $S \cdot S^* = 1$ для сочленения без потерь.

Итак, для сочленения без потерь имеем соотношение, определяющее частотную зависимость матрицы рассеяния:

$$-a^* S^* \frac{\partial S}{\partial \omega} a = 2j(W_H + W_E).$$

4.5.3. Оконечное устройство

Для оконечного устройства (двухполюсника) из предыдущего находим

$$\frac{\partial Z}{\partial \omega} = 2j \frac{W}{\frac{1}{2} I I^*}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 2j \frac{W}{\frac{1}{2} U U^*}.$$

Соотношения для матрицы рассеяния переходят в следующие:

$$S = \Gamma = e^{j\varphi}, \quad \text{если оконечное устройство без потерь,}$$

$$-a^* S^* \frac{\partial S}{\partial \omega} a = -a^* \Gamma^* \frac{\partial \Gamma}{\partial \omega} a = -a^* e^{-j\varphi} j e^{j\varphi} \frac{d\varphi}{d\omega} a = 2j (W_H + W_E).$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{W}{P},$$

где $P = \frac{1}{2} a a^*$ — мощность падающей волны.

Последнее соотношение имеет простой физический смысл. Предположим, что на вход оконечного устройства подана сумма двух волн близких частот $e^{j\omega_1 t}$ и $e^{j\omega_2 t}$. Тогда отраженная волна также будет состоять из двух волн этих частот, но с различными сдвигами фазы:

$$\begin{aligned} b &= e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} = e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} \{1 + \\ &+ e^{j[(\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)]}\} = e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} \left\{ 1 + e^{j\Delta\omega(t + \frac{\Delta\varphi}{\Delta\omega})} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, максимум отраженной волны сдвинут по времени относительно падающей волны на время

$$\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}.$$

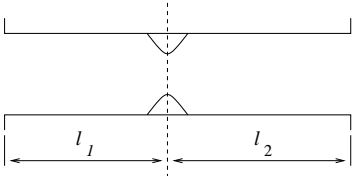
Эта величина, как видно из предыдущего, отрицательна, т.е. представляет собой задержку. Эту задержку называют групповой. Следовательно, время групповой задержки равно

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{W}{P}.$$

Таким образом, импульс, поданный на зажимы оконечного устройства, отражается через промежуток времени, равный запасенной энергии на единицу мощности (аналогия с сосудом, заполняемым жидкостью через трубу).

4.6. Неоднородности в волноводах

4.6.1. Представление неоднородности в виде четырехполюсника



Если в регулярном волноводе имеется неоднородность, то возникает отраженная волна. Волновод, в котором имеется неоднородность (см. рис.), может быть представлен в виде четырехполюсника, характеризуемого матрицей рассеяния

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix}, \quad S_{12} = S_{21}.$$

При рассмотрении неоднородностей будем пренебрегать потерями. Так как в этом случае матрица рассеяния унитарна, то

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1,$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1.$$

Отсюда следует, что $|S_{11}| = |S_{22}|$. Выберем сечения отсчета в волноводе так, чтобы $S_{11} = S_{22}$. Третье соотношение, следующее из унитарности, будет

$$S_{11} S_{12}^* + S_{12} S_{22}^* = 0.$$

Если, как выбрано, $S_{11} = S_{22}$, то

$$S_{11} S_{12}^* + S_{12} S_{11}^* = 0,$$

откуда $\text{Re}(S_{11} S_{12}^*) = 0$.

Если, например, сечения отсчета выбраны так, что $S_{11} = S_{22}$ вещественны, то $\text{Re} S_{12} = 0$, т.е. $S_{12} = S_{21}$ — чисто мнимые. В результате получаем, что

$$S_{12} = j\sqrt{1 - |S_{11}|^2} = j\sqrt{1 - S_{11}^2}.$$

Таким образом, чтобы полностью охарактеризовать неоднородность в волноводе, достаточно задать $|S_{11}|$ и расстояния l_1 и l_2 , определяющие

сечения, в которых $S_{11} = S_{22}$ вещественны, т.е. всего требуется три параметра. Если расстояния не представляют интереса, то достаточно одного параметра S_{11} .

Вместо этого параметра может быть введена шунтирующая проводимость B , связанная с S_{11} соотношением

$$S_{11} = \frac{1 - (1 + jB)}{1 + 1 + jB} = \frac{-jB}{2 + jB}$$

или

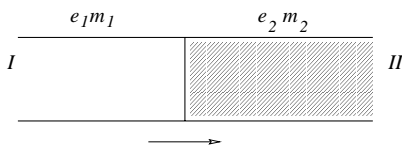
$$jB = -\frac{2S_{11}}{1 + S_{11}}.$$

Здесь S_{11} – коэффициент отражения в плоскости включения проводимости B .

Если четырехполюсник симметричен, то число параметров уменьшается до двух. Наконец, при определенном расположении плоскостей отсчета нужен лишь один параметр.

Неоднородности, встречающиеся в волноводах, можно разделить на два класса: скачкообразные неоднородности и протяженные неоднородности. Первые – это такие, у которых длина нерегулярного участка близка к нулю, т.е. границей является плоскость, перпендикулярная направлению оси волновода. У протяженных неоднородностей нерегулярный участок имеет некоторую длину в направлении оси волновода. Для первых граничные условия следует выполнить лишь на одной граничной плоскости. Во втором случае необходимо найти общее решение для поля на нерегулярном участке и удовлетворить граничным условиям на двух граничных плоскостях.

4.6.2. Скачкообразное изменение параметров вещества, заполняющего волновод



Предположим, что задана амплитуда падающей волны; необходимо найти прошедшую и отраженную волны в изображенном на рисунке волноводе.

При этом предполагается, что плоская граница перпендикулярна к осям обоих волноводов, а волновод II представляет собой продолжение волновода I . При этих условиях оказывается возможным удовлетворить

граничным условиям при наличии только волн типа падающей без вышедших мод.

Граничные условия сводятся к сохранению поперечных составляющих \vec{E} и \vec{H} . В силу одинакового сечения волноводов их собственные функции совпадают (с точностью до постоянных множителей).

В волноводе I поперечное электрическое поле (предполагая амплитуду падающей волны равной единице) равно

$$\vec{E}_I^{\text{поп}} = \vec{E}_m^{\text{поп}}(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}),$$

а поперечное магнитное поле равно

$$\vec{H}_I^{\text{поп}} = (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z})\vec{H}_m^{\text{поп}} = (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z})\frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_m^{\text{поп}}}{Z_I}.$$

В волноводе II присутствует лишь падающая волна:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{II}^{\text{поп}} &= T \cdot \vec{E}_m^{\text{поп}} \cdot e^{-j\beta_2 z}, \\ \vec{H}_{II}^{\text{поп}} &= T \cdot \vec{H}_m^{\text{поп}} \cdot e^{-j\beta_2 z} = T \cdot \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_m^{\text{поп}}}{Z_{II}} e^{-j\beta_2 z}.\end{aligned}$$

Приравнивая поля слева и справа при $z = 0$, (во втором уравнении умножая на \vec{z}_0 векторно левую и правую части) получим

$$\begin{aligned}\vec{E}_m^{\text{поп}}(1 + \Gamma) &= T\vec{E}_m^{\text{поп}}, \\ \frac{\vec{E}_m^{\text{поп}}}{Z_I}(1 - \Gamma) &= T\frac{\vec{E}_m^{\text{поп}}}{Z_{II}},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}1 + \Gamma &= T, \\ \frac{1 - \Gamma}{Z_I} &= \frac{T}{Z_{II}}.\end{aligned}$$

Деля одно уравнение на другое и решая относительно Γ , получим

$$\Gamma = \frac{Z_{II} - Z_I}{Z_{II} + Z_I}.$$

Коэффициент прохождения T равен

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2Z_{II}}{Z_{II} + Z_I}.$$

Волновые сопротивления Z_I и Z_{II} , используемые здесь, представляют собой отношения поперечных компонент электрического и магнитного полей. Для магнитных мод это сопротивление равно

$$\begin{aligned} Z^H &= \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{k^2 - g_m^2}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - g_m^2}} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - g_m^2/\omega^2\mu\varepsilon}} = \\ &= \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_{кр}^2}}. \end{aligned}$$

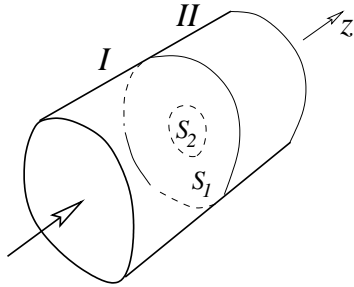
Аналогично для электрических мод

$$Z^E = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\mu/\varepsilon} \sqrt{1 - \lambda^2/\lambda_{кр}^2}.$$

Легко распространить это решение на случай диэлектрика с потерями. Тогда $\varepsilon = \varepsilon' - j\frac{\sigma}{\omega}$ – комплексная величина.

4.6.3. Диафрагмы в волноводе

Диафрагмой называют тонкую металлическую пластинку с отверстием, устанавливаемую в волноводе перпендикулярно его оси.



Граничные условия на диафрагме сводятся к равенству нулю тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности диафрагмы S_1 и совпадению в области отверстия S_2 поперечных компонент поля слева и справа (см. рис.). Для выполнения граничных условий необходимо привлечение высших мод в данном волноводе.

Для определенности будем предполагать, что в волноводе может распространяться лишь основная мода; все высшие моды предполагаются

нераспространяющимся. Тогда неоднородность может быть представлена четырехполюсником.

Обратим внимание на то, что достаточно наложить граничные условия лишь на поперечные компоненты полей, так как совпадение поперечных компонент обеспечивает выполнение граничных условий также и для продольных компонент.

Поперечное электрическое поле в области I можно записать в виде

$$\vec{E}_I = (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) \vec{E}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \vec{E}_n e^{\gamma_n z},$$

а в области II

$$\vec{E}_{II} = T e^{-j\beta z} \vec{E}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \vec{E}_n e^{-\gamma_n z},$$

где $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ – собственные поперечные векторные функции волновода; суммирование ведется по всем высшим модам в волноводе, как магнитным, так и электрическим.

Поперечное магнитное поле может быть найдено с помощью соответствующих волновых сопротивлений:

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}) \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_1}{Z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} -A_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_n}{Z_n} e^{\gamma_n z}, \\ \vec{H}_{II} &= T e^{-j\beta z} \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_1}{Z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_n}{Z_n} e^{-\gamma_n z}. \end{aligned}$$

Полагая $z = 0$ и приравнивая электрические поля слева и справа, получим

$$(1 + \Gamma) \vec{E}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \vec{E}_n = T \vec{E}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \vec{E}_n = \begin{cases} \vec{E}(x, y) & \text{на отверстии,} \\ 0 & \text{на диафрагме.} \end{cases}$$

Здесь $\vec{E}(x, y)$ – неизвестная векторная функция, имеющая только поперечные компоненты. Эта функция может быть разложена по поперечным собственным функциям волновода:

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_n \int_S \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS,$$

причем функции E_n нормированы так, что

$$\int_S \vec{E}_n \cdot \vec{E}_n^* dS = 1.$$

Здесь и выше интеграл берется по сечению волновода.
Сравнивая коэффициенты слева и справа, получаем

$$1 + \Gamma = T = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS,$$

$$A_n = B_n = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS.$$

Здесь интегралы взяты по отверстию, так как вне отверстия функция $\vec{E}(x, y) \equiv 0$.

Далее следует приравнять магнитные поля слева и справа с учетом того, что $1 + \Gamma = T$ и $A_n = B_n$. Заметим, что приравнивание справедливо только на отверстии (S_2):

$$(1 - \Gamma) \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_1}{Z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} -A_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_n}{Z_n} = (1 + \Gamma) \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_1}{Z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_n}{Z_n}.$$

Если теперь умножить левую и правую части векторно на \vec{z}_0 и собрать все слагаемые слева, то получим уравнение

$$\Gamma \frac{\vec{E}_1}{Z_1} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\vec{E}_n}{Z_n} = 0.$$

Подставляя сюда интегральные выражения для Γ и A_n , получим интегральное уравнение для неизвестной функции $\vec{E}(x, y)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n}{Z_n} \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS = \frac{\vec{E}_1}{Z_1}.$$

Еще раз напомним, что данное уравнение справедливо на отверстии S_2 . Это – уравнение с правой частью. Но можно получить также однородное интегральное уравнение, выразив коэффициент отражения Γ

через эквивалентную проводимость jB (нормированную относительно волнового сопротивления волновода), а именно,

$$\Gamma = \frac{1 - (1 + jB)}{1 + 1 + jB} = \frac{-jB}{2 + jB},$$

откуда

$$-jB = \frac{2\Gamma}{1 + \Gamma} \text{ или } \Gamma = -\frac{1}{2}jB(1 + \Gamma).$$

Учитывая, что

$$1 + \Gamma = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS,$$

находим, что

$$\Gamma = -\frac{1}{2}jB \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS.$$

Подставляя это выражение для Γ в исходное интегральное уравнение, получим однородное уравнение для $\vec{E}(x, y)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \vec{E}_1 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS = 0.$$

Векторная функция $\vec{E}(x, y)$ кроме соответствующего уравнения должна удовлетворять также граничному условию на краю диафрагмы, а именно, ее тангенциальная составляющая должна обращаться в нуль на краю идеально проводящей диафрагмы. Последнее (однородное) уравнение имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничному условию, лишь при некоторых значениях B , которые являются собственными значениями для данного уравнения. Далее будет показано, что это уравнение обладает лишь одним собственным значением (как это следует из физического смысла задачи).

Можно получить явное выражение для B . Для этого умножим скалярно последнее уравнение на $\vec{E}^*(x, y)$ и проинтегрируем по S_2 . Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS = 0.$$

Решая это равенство относительно B , получим

$$B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \frac{\left| \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \right|^2}{\left| \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \right|^2}.$$

Отметим, что для электрических мод $Z_n^E = \gamma_n / j\omega\epsilon$, для магнитных мод $Z_n^H = j\omega\mu / \gamma_n$, Z_1 – вещественная положительная величина. Поэтому слагаемые в последней сумме, соответствующие электрическим модам, дают положительный (емкостной) вклад в B , а члены, соответствующие магнитным модам, – отрицательный (индуктивный).

В большинстве случаев точное решение полученных уравнений получить невозможно, поэтому используют те или иные приближенные методы или искусственные приемы для решения задачи.

4.6.4. Вариационные методы

Полученное ранее выражение для B

$$B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \frac{\left| \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \right|^2}{\left| \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \right|^2}.$$

обладает некоторым вариационным свойством. Будем рассматривать это соотношение как функционал от функции $\vec{E}(x, y)$. Покажем, что функция $\vec{E}(x, y)$, удовлетворяющая найденному в разделе 4.6.3 интегральному уравнению, обращает в нуль вариацию B , т.е. сообщает B стационарное значение. Для этого перепишем приведенное выше выражение в виде

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS = 0$$

и будем варьировать функцию \vec{E} :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \int_{S_2} \delta \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS \int_{S_2} \delta \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - \\
& - \delta B \left| \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2 - B \left\{ \int_{S_2} \delta \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS + \right. \\
& \left. + \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \cdot \int_{S_2} \delta \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Перегруппируя слагаемые, полученное равенство можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_2} dS \delta \vec{E} \cdot \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n^* \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_n dS - B \vec{E}_1^* \int_{S_2} \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS \right\} + \\
& + \int_{S_2} dS \delta \vec{E}^* \cdot \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \vec{E}_1 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right\} - \\
& - \delta B \left| \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Для того чтобы вариация δB была равна нулю при произвольной вариации $\delta \vec{E}$, необходимо и достаточно, чтобы выражения в фигурных скобках были равны нулю. Заметим, что при вещественном B (как это следует из физического смысла B) скобки комплексно сопряжены одна другой и обращаются в нуль одновременно. Итак, условием стационарности B является уравнение, которому должна удовлетворять функция \vec{E} :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \vec{E}_1 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS = 0.$$

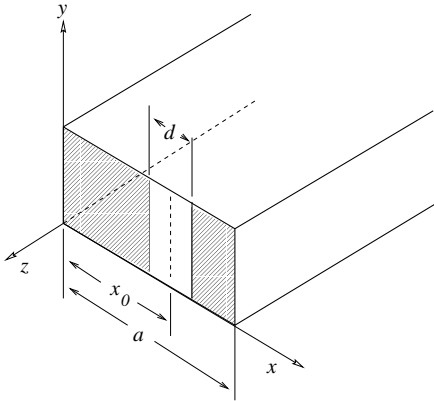
Это уравнение в точности совпадает с полученным выше (из условий сшивания полей на диафрагме) уравнением, что и требовалось доказать.

Нужно отметить при этом, что векторная функция E должна дополнительно удовлетворять указанным выше граничным условиям (так как граничные условия не входят в условия стационарности). Это накладывает ограничения на выбор пробных функций при решении вариационной задачи.

4.6.5. Приближенное вычисление проводимости

Стационарность функционала B в окрестности решения позволяет использовать для вычисления B не только точное решение, которое обычно заранее неизвестно, но и некоторое приближение, выбранное из тех или иных соображений. Благодаря стационарности функционала это дает малую ошибку.

Пример: Индуктивная диафрагма в прямоугольном волноводе (см. рис.).



В этом случае для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, в силу условий симметрии, достаточно использовать только высшие моды типа H_{n0} . Для этих мод отлична от нуля только y -я компонента электрического поля \vec{E} :

$$E_{ny} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} —$$

нормированная функция.

Для вычисления B в первом приближении можно аппроксимировать функцию $E_y(x)$ полупериодом синусоиды:

$$E_y = \begin{cases} \cos \frac{\pi(x - x_0)}{d} & \text{— на отверстии,} \\ 0 & \text{— вне отверстия.} \end{cases}$$

Для дальнейшего нужно вычислить интеграл

$$I_n = \int_{x_0 - \frac{d}{2}}^{x_0 + \frac{d}{2}} \cos \frac{\pi(x - x_0)}{d} \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Этот интеграл равен

$$I_n = \frac{2}{\pi d} \frac{1}{1/d^2 - n^2/a^2} \sin \frac{n\pi x_0}{a} \cos \frac{n\pi d}{2a}.$$

Подставляя в выражение для B (учитывая, что $Z_n = \frac{j\omega\mu}{\gamma_n}$, $Z_1 = \frac{\omega\mu}{\beta}$), получим

$$B \approx - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2\gamma_n (1/d^2 - 1/a^2)^2}{\beta (1/d^2 - n^2/a^2)^2} \frac{\sin^2 \frac{n\pi x_0}{a} \cos^2 \frac{n\pi d}{2a}}{\sin^2 \frac{\pi x_0}{a} \cos^2 \frac{\pi d}{2a}},$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\Lambda}$, $\gamma_n = \sqrt{(n\pi/a)^2 - k^2}$.

Данное выражение справедливо, если $n/a \neq 1/d$ ни для какого n . В противном случае необходимо раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ для того члена, где $n/a = 1/d$ (так как тогда $\cos \frac{n\pi d}{2a} = 0$). Для расчетов достаточно ограничиться числом членов $\sim \frac{a}{d}$, так как дальше члены ряда быстро убывают.

4.6.6. Вариационные методы. Метод Ритца

Метод Ритца является приближенным прямым методом решения вариационной задачи на экстремум функционала, в данном случае B . Он состоит в следующем.

Неизвестное поперечное поле на отверстии $\vec{E}(x, y)$ представляют в виде разложения в ряд по некоторой полной ортогональной системе векторных функций, определенной на отверстии. Для обеспечения удовлетворения граничным условиям функции должны удовлетворять граничным условиям на границе отверстия. При этом ограничиваются неко-

торым конечным числом членов в этом ряду. Затем сумму, представляющую \vec{E} , подставляют в выражение для B , причем B оказывается функцией коэффициентов разложения. Коэффициенты подбираются так, чтобы функция B имела стационарное значение. Для этого приравнивают нулю производные от B по коэффициентам. Полученная система уравнений позволяет найти коэффициенты разложения.

Полной ортогональной системой функций, удовлетворяющей граничным условиям на границах отверстия, является система собственных поперечных векторных функций волновода, сечение которого совпадает с отверстием диафрагмы.

Обозначим эти функции через $\vec{e}_n(x, y)$. Тогда

$$\vec{E} \approx \sum_{m=1}^N a_m \vec{e}_m.$$

Вычислим интеграл

$$I_n = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* dS = \sum_{m=1}^N a_m \int_{S_2} \vec{e}_m \vec{E}_n^* dS = \sum_{m=1}^N a_m b_{mn},$$

где

$$b_{mn} = \int_{S_2} \vec{e}_m \vec{E}_n^* dS.$$

Подставляя в выражение для B , получим

$$B = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \left| \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} \right|^2}{\left| \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} \right|^2}.$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$B \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{s1}^* = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{sn}^*.$$

Теперь будем варьировать коэффициенты a_m , a_s^* (в предположении $\delta B = 0$):

$$\begin{aligned}
& B \left\{ \sum_{m=1}^N \delta a_m b_{m1} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{s1}^* + \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} \sum_{s=1}^N \delta a_s^* b_{s1}^* \right\} = \\
& = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \left\{ \sum_{m=1}^N \delta a_m b_{mn} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{sn}^* + \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} \sum_{s=1}^N \delta a_s^* b_{sn}^* \right\}
\end{aligned}$$

или, иначе

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^N \delta a_m \left\{ B b_{m1} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{s1}^* - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{mn} \sum_{s=1}^N a_s^* b_{sn}^* \right\} + \\
& + \sum_{s=1}^N \delta a_s^* \left\{ B b_{s1}^* \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{sn}^* \cdot \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Вследствие произвольности вариаций δa_m и δa_s^* это равенство может выполняться, лишь если равны нулю выражения в фигурных скобках. Так как Z_1 – вещественно, а Z_n – чисто мнимые величины ($n > 1$), то выражения в фигурных скобках комплексно сопряжены друг другу и достаточно, чтобы в нуль обращалось одно из них, например,

$$B b_{s1}^* \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{sn}^* \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} = 0 \text{ для } s = 1, 2, \dots, N.$$

Данные равенства могут быть переписаны в виде (при перестановке порядка суммирования)

$$\sum_{m=1}^N a_m \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{sn}^* b_{mn} - B b_{s1}^* b_{m1} \right\} = 0 \text{ при } s = 1, 2, \dots, N.$$

Мы получили систему из N однородных линейных алгебраических уравнений для N неизвестных коэффициентов a_m . Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравняв нулю определитель, получим алгебраическое уравнение для определения неизвестной пока проводимости B . По смыслу задачи эта величина должна быть вещественной, а решение – единственным. Можно показать, что это действительно так. Для этого вначале предположим, что ни один из коэффициентов b_{s1}^* не равен нулю. Разделим каждое из уравнений системы на соответствующее b_{s1}^* . Тогда получим систему

$$\sum_{m=1}^N a_m \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \frac{b_{sn}^* b_{mn}}{b_{s1}^*} - B b_{m1} \right\} = 0 \quad \text{при } s = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнение для B в этом случае приобретает вид

$$\text{Det } c_{ms} = \text{Det} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \frac{b_{sn}^* b_{mn}}{b_{s1}^*} - B b_{m1} \right\} = 0.$$

В определителе в правой части слагаемое $B b_{m1}$ не зависит от номера строки s . Если вычесть первую строку из всех остальных строк, то B останется только в первой строке. Разлагая определитель по элементам первой строки, получаем линейное относительно B уравнение с вещественными коэффициентами, что и требовалось доказать.

4.6.7. Вариационные методы. Метод Галеркина

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение для поля на отверстии диафрагмы \vec{E} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n}{Z_n} \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - \frac{\vec{E}_1}{Z_1} = 0.$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде разложения по некоторой полной системе ортогональных векторных функций, удовлетворяющих граничным условиям на контуре отверстия. Такими функциями являются собственные векторные функции \vec{e}_m волновода, сечение которого совпадает с отверстием диафрагмы:

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \vec{e}_m,$$

где a_m – неизвестные коэффициенты. Метод Галеркина позволяет приближенно вычислить любое число этих коэффициентов. Для этого оставим в сумме N членов

$$E \approx \sum_{m=1}^N a_m \vec{e}_m$$

и подставим это интегрально в уравнение. Так как эта сумма представляет решение приближенно, то правая часть уравнения при подстановке не обращается в нуль:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n}{Z_n} \sum_{m=1}^N a_m \int_{S_2} \vec{e}_m \cdot \vec{E}_n^* dS - \frac{\vec{E}_1}{Z_1} = \Delta.$$

Согласно методу Галеркина коэффициенты a_m выбирают так, чтобы Δ была ортогональна всем функциям \vec{e}_s ($s = 1, 2, \dots, N$) на S_2 :

$$\int_{S_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n}{Z_n} \sum_{m=1}^N a_m \int_{S_2} \vec{e}_m \cdot \vec{E}_n^* dS - \frac{\vec{E}_1}{Z_1} \right\} \cdot \vec{e}_s^* \cdot dS = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначим

$$b_{mn} = \int_{S_2} \vec{e}_m \vec{E}_n^* dS \quad \text{и} \quad b_{sn} = \int_{S_2} \vec{e}_s \vec{E}_n^* dS.$$

Тогда уравнения приобретают вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{sn}^*}{Z_n} \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} = \frac{b_{s1}^*}{Z_1},$$

или

$$\sum_{m=1}^N a_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{sn}^* b_{mn}}{Z_n} = \frac{b_{s1}^*}{Z_1}, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Мы получили систему N линейных уравнений относительно N коэффициентов a_m . Решая ее, мы найдем приближенное выражение для \vec{E} , что позволяет вычислить B , используя ранее полученную формулу.

Аналогичным способом можно решать также однородное уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS - B \vec{E}_1 \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS = 0.$$

Для этого вновь запишем

$$E \approx \sum_{m=1}^N a_m \vec{e}_m.$$

Подставляя это в интегральное уравнение, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} \vec{E}_n \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} - B \vec{E}_1 \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} = \Delta.$$

Умножая это уравнение на \vec{e}_s^* и интегрируя по S_2 (с учетом требования ортогональности) получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{sn}^* \sum_{m=1}^N a_m b_{mn} - B b_{s1}^* \sum_{m=1}^N a_m b_{m1} = 0$$

или

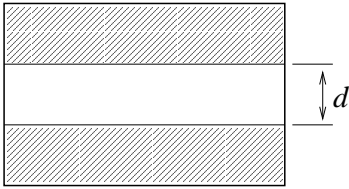
$$\sum_{m=1}^N a_m \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2Z_1}{jZ_n} b_{sn}^* b_{mn} - B \cdot b_{s1}^* b_{m1} \right\} = 0 \text{ при } s = 1, 2, \dots, N.$$

Данное уравнение в точности совпадает с аналогичным уравнением, полученным с помощью метода Ритца, что дает основания отнести метод Галеркина к классу вариационных методов.

4.6.8. Диафрагмы в прямоугольном волноводе

Выше мы уже рассматривали индуктивную диафрагму в прямоугольном волноводе. Там было найдено соотношение для проводимости с помощью приближенного метода, основанного на стационарности функционала проводимости. С помощью квазистатического метода может быть получено более компактное выражение (хотя и не более точное)

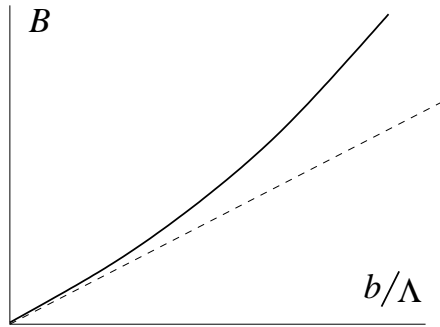
$$B = -\frac{\Lambda}{a} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{2a} \left(1 + \sec^2 \frac{\pi d}{2a} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x_0}{2a} \right).$$



Теперь рассмотрим емкостную диафрагму (см. рис.). Такая диафрагма имеет положительную реактивную проводимость и, следовательно, эквивалентна емкости. В случае симметричного отверстия проводимость определяется приближенным соотношением

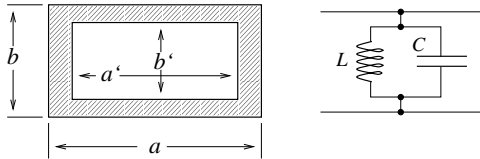
$$B = \frac{4b}{\Lambda} \ln \operatorname{csc} \frac{\pi d}{2b}.$$

График этой проводимости как функции от b/Λ приведен на рисунке.



Сочетание индуктивной и емкостной диафрагм позволяет получить шунтирующий резонансный контур (см. рис.). Было найдено, что резонанс имеет место для волны, определяемой уравнением

$$\frac{a}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = \frac{a'}{b'} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a'}\right)^2}.$$



Отсюда, в частности, следует, что если устремить b' к 0, то резонанс имеет место при $\lambda = 2a'$, т.е. при $a' = \lambda/2$. В этом случае щель можно рассматривать как короткозамкнутую с двух концов щелевую линию. Проводимость резонансного контура с присоединенным к нему волноводом имеет вид

$$Y = 1 + jQ \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

где ω_0 – резонансная частота. Значения Q для диафрагм невелики (порядка 10) и возрастают с уменьшением b' .

Металлический штырь малого диаметра применяется для согласования волноводов. Нетрудно видеть, что штырь может быть представлен последовательно соединенными емкостью и индуктивностью (см. рис.).



При малой глубине погружения преобладает емкостная проводимость. При глубине погружения, примерно равной $\lambda/4$, имеет место резонанс. При этом волновод оказывается закороченным и перестает пропускать волны. При еще большем погружении преобладает индуктивность, и, хотя имеется отражение, волна частично проходит.

Возможны также другие резонансные комбинации, например, индуктивная диафрагма с емкостным штырем, позволяющим осуществлять настройку резонансной диафрагмы.

4.6.9. Соединение волноводов различного сечения

Рассмотрим сочленение двух волноводов различного сечения S_1 и S_2 , причем в обоих волноводах могут распространяться только по одной моде. Общее отверстие волноводов обозначим через A . Тогда для поперечных составляющих электрического поля на границе имеют место условия

$$(1 + \Gamma) \vec{E}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \vec{E}_n = \begin{cases} \vec{E}(x, y) & - \text{ на } A, \\ 0 & - \text{ на } S_1 - A \end{cases}$$

слева и

$$T \cdot \vec{E}'_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \vec{E}'_n = \begin{cases} \vec{E}(x, y) & - \text{ на } A, \\ 0 & - \text{ на } S_2 - A \end{cases}$$

справа. Здесь \vec{E}_n – собственные поперечные нормированные векторные функции волновода I , \vec{E}'_n – то же для волновода II , $\vec{E}(x, y)$ – неизвестная пока функция распределения поперечного электрического поля на отверстии. Если указанные собственные функции нормированы к единице, то

$$\begin{aligned} 1 + \Gamma &= \int \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS, & A_n &= \int \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS, \\ T &= \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_1^* dS, & B_n &= \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_n^* dS. \end{aligned}$$

Поперечные составляющие магнитного поля на отверстии слева и справа равны друг другу:

$$(1 - \Gamma) \cdot \vec{H}_1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \vec{H}_n = T \cdot \vec{H}'_1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \vec{H}'_n,$$

или

$$(1 - \Gamma) \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_1}{Z_1} - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}_n}{Z_n} = T \cdot \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}'_1}{Z'_1} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\vec{z}_0 \times \vec{E}'_n}{Z'_n}.$$

Здесь Z_1, Z_n, Z'_1, Z'_n – отношения поперечных составляющих электрического и магнитного полей. Умножая это уравнение векторно на \vec{z}_0 и раскрывая двойные векторные произведения, получим уравнение

$$(1 - \Gamma) \frac{\vec{E}_1}{Z_1} - \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\vec{E}_n}{Z_n} = T \frac{\vec{E}'_1}{Z'_1} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\vec{E}'_n}{Z'_n}.$$

Если теперь заменить Γ, T, A_n и B_n их выражениями в виде интегралов, то можно получить интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\vec{E}(x, y)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}_n}{Z_n} \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_n^* dS + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vec{E}'_n}{Z'_n} \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_n^* dS = \frac{2\vec{E}_1}{Z_1}.$$

Возможен, однако, другой вид преобразования уравнения. Для этого умножим левую и правую части уравнения на \vec{E}^* и проинтегрируем по отверстию. Получим

$$\frac{1 - \Gamma}{Z_1} \int_A \vec{E}^* \cdot \vec{E}_1 dS - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{Z_n} = |T|^2 \frac{1}{Z_1'} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{Z_n'}.$$

Умножим и разделим первое слагаемое в левой части на $1 + \Gamma = \int_A \vec{E} \vec{E}_1^* dS$:

$$\frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} \cdot \frac{1}{Z_1} \left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{Z_n} = |T|^2 \frac{1}{Z_1'} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|B_n|^2}{Z_n'},$$

откуда

$$\frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{|T|^2 \frac{Z_1}{Z_1'} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_1}{Z_n} |A_n|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_1}{Z_n'} |B_n|^2}{\left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2}.$$

Но $\frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = Y$ – входная проводимость сочленения, нагруженного с другой стороны на согласованную нагрузку. Таким образом, получаем выражение для проводимости Y :

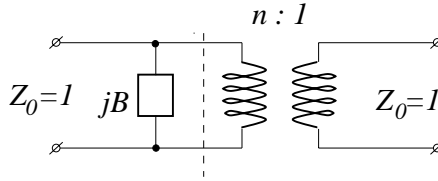
$$Y = \frac{|T|^2 \frac{Z_1}{Z_1'}}{\left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2} + j \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_1}{jZ_n} |A_n|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Z_1}{jZ_n'} |B_n|^2}{\left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2}.$$

Напомним, что для Н-мод $Z_n^H = \frac{j\omega\mu}{\gamma_n}$, для Е-мод $Z_n^E = \frac{\gamma_n}{j\omega\varepsilon}$ – вещественные для распространяющейся и чисто мнимые для нераспространяющихся мод.

Отсюда, если $S_1 \rightarrow S_2$, можно получить выражение для проводимости диафрагмы (при $\vec{E}'_n \rightarrow \vec{E}_n$ и $Z'_n \rightarrow Z_n$).

Первое слагаемое в полученной формуле – вещественная часть, второе – мнимая. Первое слагаемое представляет проводимость второго

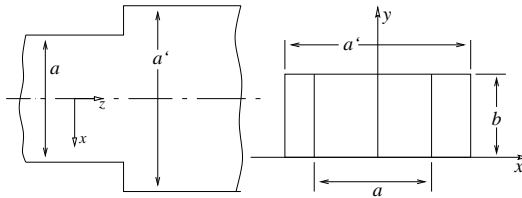
волновода, нагруженного на согласованную нагрузку, второе – реактивную проводимость сочленения. Эквивалентная схема сочленения имеет вид



При сочленении двух волноводов особый интерес представляет случай, когда волноводы мало отличаются один от другого. В этом случае в качестве первого приближения вместо \vec{E} можно подставить поле \vec{E}_1 в первом волноводе. Рассмотрим в качестве примера соединение двух прямоугольных волноводов, в которых может распространяться только мода H_{10} .

Изменение сечения в плоскости H .

Рассматривается симметричное сочленение, представленное на рис.



В этом случае граничные условия могут быть удовлетворены с использованием лишь магнитных мод H_{n0} .

Для использования симметрии ось y поместим посередине волновода. При вычислении проводимости сочленения в качестве функции поля $\vec{E}(x, y)$ в отверстии примем приближенно функцию \vec{E}_1 электрического поля основной моды в волноводе I . Так как \vec{E}_1 симметрична относительно оси y , то при вычислении интегралов несимметричные собственные функции дают нуль, и в разложении остаются только симметричные.

Симметричные собственные функции электрического поля в волноводе I (нормированные к единице) имеют вид

$$E_{ym} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos(2m + 1) \frac{\pi x}{a},$$

$$E'_{ym} = \sqrt{\frac{2}{a'b}} \cos(2m + 1) \frac{\pi x}{a'}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_m dS = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0, \\ 1 & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

Поэтому $A_{2m+1} = 0$ при $m \neq 0$.

Далее,

$$B_{2m+1} = \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_m dS = \sqrt{\frac{a}{a'}} \frac{\pi \cos(2m + 1)\theta}{\pi^2/4 - (2m + 1)^2\theta^2}, \quad \theta = \frac{\pi a}{2a'}.$$

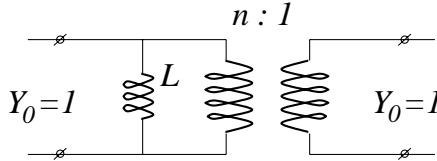
При $m = 0$ имеем

$$T = \sqrt{\frac{a}{a'}} \frac{\pi \cdot \cos \theta}{\pi^2/4 - \theta^2}.$$

Подставляя в формулу для Y и учитывая, что $\frac{Z_1}{Z_1} = \frac{\beta'}{\beta}$, $\frac{Z_1}{jZ'_n} = -\frac{\gamma'_n}{\beta}$, получим

$$Y = \frac{\beta' a}{\beta a'} \left(\frac{\pi \cdot \cos \theta}{\pi^2/4 - \theta^2} \right)^2 - j \frac{a}{a'} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma'_{2m+1}}{\beta} \left(\frac{\pi \cos(2m + 1)\theta}{\pi^2/4 - (2m + 1)^2\theta^2} \right)^2.$$

Полученное соотношение показывает, что сочленение действует как трансформатор с коэффициентом трансформации, равным T . Эквивалентная схема представлена на рис.

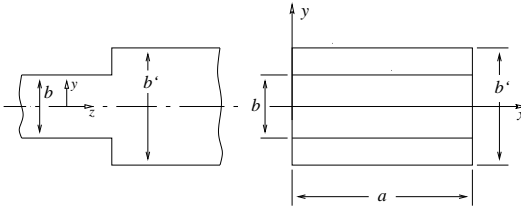


$$\text{Здесь } n = \sqrt{\frac{\beta' a}{\beta a'} \left(\frac{\pi \cos \theta}{\pi^2/4 - \theta^2} \right)^2}.$$

Формула упрощается, если скачок размера невелик: $\frac{a}{a'} = 1 - \alpha$, причем $\alpha \ll 1$. Тогда

$$Y \approx \frac{\beta'}{\beta} \left(\frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{2}} \right)^2 - j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma'_{2m+1}}{\beta} \left(\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi m(m+1)} \right)^2.$$

Изменение сечения в плоскости E (см. рис.).



Сочленение предполагается симметричным. Благодаря симметрии в разложении по высшим модам остаются только моды, четные в направлении y .

Чтобы удовлетворить граничным условиям, в данном случае необходимо использовать как электрические, так и магнитные моды. Однако задача упрощается благодаря тому, что исходя из симметрии можно получить информацию относительно неизвестной функции \vec{E} . Прежде всего, \vec{E} имеет только y -ю компоненту. Далее, зависимость \vec{E} от x такая же, как и для основной моды, так как граничные условия не зависят от x .

Так как $E_x = 0$, то при вычислении интерес представляют только y -е составляющие собственных функций, причем вклад дают лишь собственные функции с $n = 1$, т.е. зависящие от x так же, как и основная мода. Кроме того, из симметрии следует, что вклад дают только те собственные функции, для которых m четно ($m = 2l$).

Нормированные собственные функции, представляющие интерес, имеют следующий вид (с учетом расположения осей):

Магнитные моды ($m = 2l$)

Слева

$$E_{2ly} = \frac{2\pi}{a \cdot g_{2l}\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ly}{b}$$

При $l = 0$

$$E_{0y} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

Справа

$$E'_{2ly} = \frac{2\pi}{a \cdot g'_{2l}\sqrt{ab'}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ly}{b'}$$

$$E'_{0y} = \sqrt{\frac{2}{ab'}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

Электрические моды ($m = 2l$)

$$E_{2ly} = \frac{4\pi l}{b \cdot g_{2l}\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ly}{b} \quad \left| \quad E'_{2ly} = \frac{4\pi l}{b' \cdot g'_{2l}\sqrt{ab'}} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi ly}{b'}$$

при этом

$$g_{2l} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2 l^2}{b^2}}, \quad g'_{2l} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2 l^2}{b'^2}}.$$

В качестве функции \vec{E} , которая, как указано выше, имеет только y -ю компоненту и зависит от x так же, как основная мода, примем функцию с компонентами: $E_x = 0$, $E_y = E(y) \sin \frac{\pi x}{a}$.

При этом вещественная составляющая проводимости равна

$$G = \frac{\left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}'_1^* dS \right|^2}{\left| \int_A \vec{E} \cdot \vec{E}_1^* dS \right|^2} \frac{Z_1}{Z'_1}.$$

Здесь $Z_1 = Z'_1$ (так как зависит лишь от a), $E_{1y} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a}$, $E'_{1y} = \sqrt{\frac{2}{ab'}} \sin \frac{\pi x}{a}$.

При подстановке E интегралы сокращаются:

$$G = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{ab'}} \right)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{ab}} \right)^2} = \frac{b}{b'}.$$

Мнимая (реактивная) составляющая проводимости равна

$$B = \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{Z_1}{jZ_{2l}} \left| \int_A E \cdot E_{2l}^* dS \right|^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Z_1}{jZ_{2l}'} \left| \int_A E \cdot E_{2l}'^* dS \right|^2}{\left| \int_A E \cdot E_1^* dS \right|^2}.$$

В качестве первого приближения для \vec{E} примем поле основной моды в первом волноводе

$$E_y = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Все A_n для магнитных и электрических мод содержат множитель

$$\int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{2\pi ly}{b} dy = 0 \quad (l \neq 0),$$

поэтому все $A_n = 0$.

Вычислим теперь $B_n = B_{2l}$ для магнитных и электрических мод.

Магнитные моды

$$\begin{aligned} B_{2l}^H &= \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{2\pi}{ag_{2l}'\sqrt{ab'}} \int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{2\pi ly}{b'} dy = \frac{2\pi\sqrt{2}}{a^2\sqrt{bb'}} \frac{ab'}{2\pi l} \times \\ &\times \sin \frac{\pi lb}{b'} = \frac{\pi\sqrt{2}}{ag_{2l}'^2} \sqrt{\frac{b}{b'}} \frac{\sin l\varphi}{l\varphi}, \end{aligned}$$

где $\varphi = \frac{\pi b}{b'}$. Квадрат

$$(B_{2l}^H)^2 = \frac{b'}{b} \cdot \frac{2\pi^2}{a^2 g_{2l}'^2} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2.$$

Электрические моды

$$B_{2l}^E = \frac{2\sqrt{2}\pi l}{g_{2l}' b'} \sqrt{\frac{b}{b'}} \frac{\sin l\varphi}{l\varphi}, \quad (B_{2l}^E)^2 = \frac{b}{b'} \cdot \frac{8\pi^2 l^2}{b'^2 g_{2l}'^2} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2.$$

$$P_{2l} = \frac{Z_1}{jZ'_{2l}{}^H} (B_{2l}^H)^2 + \frac{Z_1}{jZ'_{2l}{}^E} (B_{2l}^E)^2.$$

Здесь $Z_1 = \frac{\omega\mu}{\beta}$, $Z'_{2l}{}^H = \frac{j\omega\mu}{\gamma'_{2l}}$, $Z'_{2l}{}^E = \frac{\gamma'_{2l}}{j\omega\varepsilon}$.

Подставляя это в выражение для P_{2l} , получим

$$\begin{aligned} P_{2l} &= \frac{1}{\beta\gamma'_{2l}} \{k^2 (B_{2l}^E)^2 - \gamma'_{2l}{}^2 (B_{2l}^H)^2\} = \\ &= \frac{1}{\beta\gamma'_{2l}} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2 \frac{b}{b'} \left\{ k^2 \frac{8\pi^2 l^2}{b'^2 g'_{2l}{}^2} - \gamma'_{2l}{}^2 \frac{2\pi^2}{a^2 g'_{2l}{}^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\beta\gamma'_{2l}} \frac{b}{b'} \frac{2\pi^2}{g'_{2l}{}^2} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2 \left\{ k^2 \frac{4l^2}{b'^2} - \frac{\gamma'_{2l}{}^2}{a^2} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\gamma'_{2l}{}^2 = g'_{2l}{}^2 - k^2$, то

$$P_{2l} = \frac{1}{\beta\gamma'_{2l}} \frac{b}{b'} \frac{2\pi^2}{g'_{2l}{}^2} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2 \left(k^2 \frac{4l^2}{b'^2} - \frac{1}{a^2} (g'_{2l}{}^2 - k^2) \right).$$

Выражение в последних скобках равно

$$\begin{aligned} k^2 \frac{4l^2}{b'^2} - \frac{1}{a^2} (g'_{2l}{}^2 - k^2) &= k^2 \left(\frac{4l^2}{b'^2} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{g'_{2l}{}^2}{a^2} = k^2 \frac{g'_{2l}{}^2}{\pi^2} - \frac{g'_{2l}{}^2}{a^2} = \\ &= \frac{g'_{2l}{}^2}{\pi^2} \left(k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} \right) = \frac{g'_{2l}{}^2}{\pi^2} \beta^2. \end{aligned}$$

Подставляя, получим

$$P_{2l} = \frac{1}{\beta\gamma'_{2l}} \frac{b}{b'} \frac{2\pi^2}{g'_{2l}{}^2} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2 \frac{g'_{2l}{}^2}{\pi^2} \beta^2 = \frac{\beta}{\gamma'_{2l}} \frac{2b}{b'} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2.$$

Подставляя в выражение для B (с учетом того, что $\int_A EE_1^* dS = 1$, $\int_A EE_{2l}^* dS = 0$), получим

$$B = \sum_{l=1}^{\infty} P_{2l} = \beta \frac{2b}{b'} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_{2l}} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2.$$

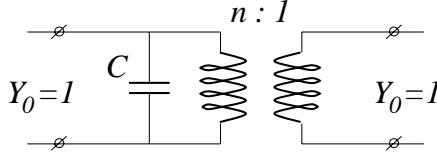
Отсюда проводимость равна

$$Y = \frac{b}{b'} + 2j\beta\frac{b}{b'} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_{2l}} \left(\frac{\sin l\varphi}{l\varphi} \right)^2,$$

где

$$\varphi = \frac{\pi b}{b'}, \quad \gamma'_{2l} = \sqrt{g'_{2l}{}^2 - k^2}.$$

Так как $B > 0$, проводимость имеет емкостной характер и эквивалентная схема имеет вид, представленный на рис.



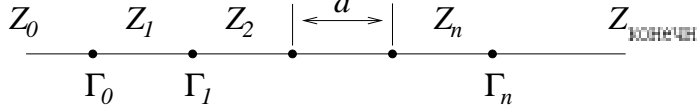
Здесь $n = \sqrt{\frac{b}{b'}}$.

При уменьшении размера скачка емкость стремится к нулю как квадрат скачка $\sim \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2$, добавка к G – как первая степень, поэтому при малых скачках емкостью можно пренебречь. В этом случае отражение определяется отношением волновых проводимостей волноводов b/b' .

4.6.10. Согласование волноводов многоступенчатыми переходами

Здесь рассматривается согласование волноводов при изменении размеров в плоскости E , когда можно пренебречь реактивностью скачка и отражение определяется только соотношением волновых сопротивлений, поэтому результаты могут быть применены также к ТЕМ линиям. Кроме того мы будем предполагать скачки малыми. Пренебрегаем также многократными отражениями. Следует отметить, что все эти ограничения вводятся для простоты расчета, но аналогичный результат может быть получен и в более общем случае, когда скачки велики и реактивностями пренебрегать не следует.

Рассмотрим многоступенчатый переход между двумя волноводами, состоящий из отрезков равной длины, но различного волнового сопротивления (см. рис.).



Величины $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – местные коэффициенты отражения:

$$\Gamma_i = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{Z_{i+1} + Z_i}.$$

Пусть для определенности n – четное число.

Отраженная волна в начале перехода равна, очевидно, сумме волн, отраженных от отдельных сочленений (в пренебрежении многократными отражениями):

$$b = \sum_{m=0}^n \Gamma_m e^{-2jm\varphi} = e^{-jn\varphi} \sum_{m=0}^n \Gamma_m e^{j(n-2m)\varphi} =$$

$$= e^{-jn\varphi} \left\{ \Gamma_0 e^{jn\varphi} + \Gamma_1 e^{j(n-2)\varphi} + \dots + \Gamma_{n/2} + \dots + \Gamma_n e^{-jn\varphi} \right\},$$

где

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\Lambda}.$$

Предположим, что переход выполнен симметрично, так что $\Gamma_m = \Gamma_{n-m}$. Тогда

$$b = 2e^{-jn\varphi} \left\{ \Gamma_0 \cos n\varphi + \Gamma_1 \cos(n-1)\varphi + \dots + \frac{1}{2}\Gamma_{n/2} \right\},$$

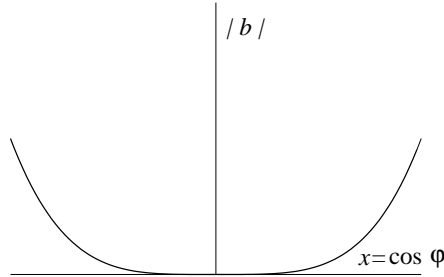
т.е. выражается через косинусы кратных дуг. Так как косинусы кратных дуг могут быть выражены через степени $\cos \varphi$, то амплитуда отраженной волны выражается через полином от $\cos \varphi$. Обозначив $\cos \varphi = x$, можем записать

$$|b| = M P_n(x),$$

где $P_n(x)$ – полином степени n с коэффициентом при x , равным единице.

Переходы, у которых коэффициент отражения выражается через некоторый полином с вещественными коэффициентами от $\cos \varphi$, называются полиномиальными. Условием для этого служат равенство отдельных отрезков по длине и симметрия коэффициентов отражения.

Подбирая коэффициенты подиннома определенным образом, можно получить хорошее согласование в широкой полосе частот. Если местные коэффициенты подобраны так, что исчезают все степени x , кроме высшей, то такой переход называют биномиальным или переходом с максимально плоской характеристикой (см. рис.).



Для этого местные коэффициенты отражения должны быть пропорциональны коэффициентам бинома Ньютона:

$$\Gamma_m = \alpha C_n^m.$$

Тогда

$$b = \sum_{m=0}^n \Gamma_m e^{j(n-2m)\varphi} = \alpha (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})^n = \alpha 2^n \cos^n \varphi = 2^n \alpha x^n.$$

Величина α определяется при $x = 1$ ($\varphi = 0$):

$$b(\varphi = 0) = \sum_m \Gamma_m = 2^n \alpha,$$

откуда $\alpha = \frac{\Gamma_T}{2^n}$, где $\Gamma_T = \sum_m \Gamma_m$ — коэффициент отражения при соединении согласуемых линий без перехода. Отсюда

$$b = \Gamma_T x^n.$$

Если x в заданной полосе частот изменяется в пределах $-\frac{1}{t} \leq x \leq \frac{1}{t}$ при $t > 1$, то максимальный коэффициент отражения в этой полосе будет равен

$$b_{\text{макс}} = \frac{\Gamma_T}{t^n}.$$

Величину $K = t^n$ в этом случае называют выигрышем, так как она показывает, во сколько раз в заданной полосе уменьшается коэффициент отражения. Чем уже полоса, тем больше выигрыш. Заметим, что середина диапазона определяется тем, что $x = 0$, т.е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда $d = \frac{\Lambda}{4}$, т.е. отрезки должны быть четвертьволновыми для средней длины волны.

Другой вариант может быть следующим. Выберем местные коэффициенты отражения так, чтобы суммарный коэффициент отражения описывался полиномом, наименее уклоняющимся от нуля в данном диапазоне. Для этого используются полиномы Чебышева $T_n^*(y)$:

$$T_n^*(y) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(y),$$

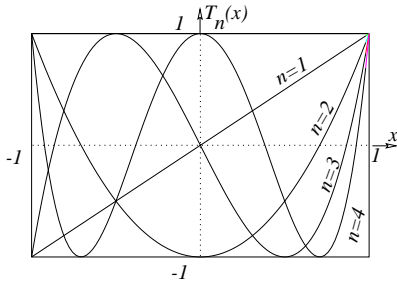
где $T_n(y) = \cos(n \arccos y)$.

Чебышевым было показано, что полином $T_n^*(y)$ является полиномом с коэффициентом при старшем члене, равным 1, наименее уклоняющимся от нуля при изменении y в пределах $-1 < y < +1$. Ниже приведены первые пять полиномов $T_n(y)$ (см. рис.):

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= y, \\ T_2 &= 2y^2 - 1, \\ T_3 &= 4y^3 - 3y, \\ T_4 &= 8y^4 - 8y^2 + 1. \end{aligned}$$

Полиномы удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$T_{n+1} = 2T_n y - T_{n-1}.$$



Так как x изменяется в пределах $(-\frac{1}{t}, \frac{1}{t})$, то необходимо ввести масштабный множитель:

$$b = M T_n^*(tx).$$

Величина M находится так же, как и выше. При $x = 1$ $b = \Gamma_T$. Поэтому $M = \frac{\Gamma_T}{T_n^*(t)}$. Отсюда получаем

$$|b| = \Gamma_T \frac{T_n^*(tx)}{T_n^*(t)} = \Gamma_T \frac{T_n(tx)}{T_n(t)}.$$

Наибольшее значение $T_n(tx)$ в рабочем диапазоне равно 1, поэтому

$$b_{\text{макс}} = \frac{\Gamma_T}{T_n(t)}.$$

Отсюда выигрыш равен $K = T_n(t)$. Можно показать, что этот выигрыш заметно превышает выигрыш для биномиального перехода (примерно в 2^{n-1} раз).

Ниже приведены соотношения местных коэффициентов отражения для чебышевского перехода:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2(1 - 1/t^2) & 1 & \\ 1 & 3(1 - 1/t^2) & 3(1 - 1/t^2) & 1, \end{array}$$

т.е. более плавный переход, чем биномиальный.

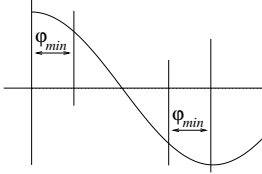
Определим теперь диапазон, т.е. величину t . Длина ступеньки определяется углом

$$\varphi = \frac{2\pi d}{\Lambda}.$$

На краях диапазона (см. рис.)

$$\varphi_{\min} = \frac{2\pi d}{\Lambda_{\max}} = \arccos \frac{1}{t},$$

$$\varphi_{\max} = \frac{2\pi d}{\Lambda_{\min}} = \arccos \left(-\frac{1}{t} \right) = \pi - \varphi_{\min}.$$



Разделим одно соотношение на другое:

$$\frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_{\min}} = \frac{\pi - \varphi_{\min}}{\varphi_{\min}} = q -$$

заданное отношение.

Отсюда

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{1 + q}; \quad \varphi_{\max} = \frac{\pi q}{1 + q}.$$

Масштабный множитель выражается через q :

$$t = \frac{1}{\cos \varphi_{\min}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{1 + q}}.$$

Можно найти также длину ступени:

$$\varphi_{\min} = \frac{2\pi d}{\Lambda_{\max}} = \frac{\pi}{1 + q},$$

откуда

$$d = \frac{\Lambda_{\max}}{2(1 + q)} = \frac{\Lambda_{\min} q}{2(1 + q)} = \frac{\Lambda_{\min} \Lambda_{\max} / \Lambda_{\min}}{2(1 + \Lambda_{\max} / \Lambda_{\min})} =$$

$$= \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\Lambda_{\min}} + \frac{1}{\Lambda_{\max}} \right)} = \frac{\Lambda_{\text{ср}}}{4},$$

где

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{ср}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda_{\min}} + \frac{1}{\Lambda_{\max}} \right).$$

Для ТЕМ-линии $\frac{1}{\Lambda} = \frac{f}{c}$, поэтому

$$d = \frac{c}{2(f_{\max} + f_{\min})} = \frac{c}{4f_{\text{cp}}} = \frac{\lambda_{\text{cp}}}{4},$$

т.е. четверти волны на средней частоте.

Для волновода длина d равна четверти длины волны на некоторой средней волне диапазона.

Пример: $\Gamma_T = 0.5$; $q = 2$; $n = 4$.

Тогда

$$t = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2.$$

Выигрыш (для чебышевского перехода) равен

$$K_4 = T_4(2) = 97.$$

Максимальный коэффициент отражения в заданном диапазоне равен

$$b = \frac{0.5}{97} = 0.005.$$

Биномиальный переход при этих условиях дает выигрыш $K_4 = 2^4 = 16$.

5. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДОВ ЗАДАНЫМИ ТОКАМИ

До сих пор рассматривалась однородная задача, соответствующая распространению свободных волн. Но интерес представляет также задача о вынужденных колебаниях, иначе говоря, задача о возбуждении волн в волноводе.

Различают два способа возбуждения: возбуждение заданными (сторонними) токами и возбуждение заданным полем на границе (неоднородные граничные условия). Возбуждение волноводов токами встречается в СВЧ-электронике, когда волновод возбуждается потоками заряженных частиц. В СВЧ-метрике чаще встречается возбуждение полем на границе. Как мы увидим ниже, формально возбуждение через границу может быть сведено к возбуждению поверхностными токами.

Исходными для решения задачи являются уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}.$$

В таком виде уравнения Максвелла записаны несимметрично. Однако при решении краевых задач часто оказывается удобной симметричная запись уравнений Максвелла. Симметризация достигается путем введения магнитных токов. Эти токи являются фиктивными; они служат для того, чтобы, отбрасывая некоторую часть поля вне интересующей нас области, заменить его магнитными токами, текущими на границе. Способ такой замены мы рассмотрим несколько позднее.

При этом условии уравнения Максвелла можно записать в следующей форме:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{J}_m, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_e,$$

где \vec{J}_m – плотность магнитного тока, \vec{J}_e – плотность электрического тока.

Существенную роль в задачах о вынужденных колебаниях играет лемма Лоренца. Ранее была получена лемма Лоренца при отсутствии токов.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)}) - \operatorname{div}(\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) &= \vec{H}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(2)} - \\ &- \vec{H}^{(1)} \operatorname{rot} \vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(2)} \operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ – два решения уравнений Максвелла, записанных выше и соответствующих токам $J_e^{(1)}$, $J_m^{(1)}$, $J_e^{(2)}$, $J_m^{(2)}$. Учитывая это и подставляя rot из данных уравнений, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)}) - \operatorname{div}(\vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) &= \vec{H}^{(2)} \left[-j\omega\mu\vec{H}^{(1)} - \vec{J}_m^{(1)} \right] - \\ &- \vec{E}^{(1)} \left[j\omega\varepsilon\vec{E}^{(2)} + \vec{J}_e^{(2)} \right] - \vec{H}^{(1)} \left[-j\omega\mu\vec{H}^{(2)} - \vec{J}_m^{(2)} \right] + \\ + \vec{E}^{(2)} \left[j\omega\varepsilon\vec{E}^{(1)} + \vec{J}_e^{(1)} \right] &= \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{J}_e^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{J}_e^{(2)} + \vec{H}^{(1)} \cdot \vec{J}_m^{(2)} - \vec{H}^{(2)} \cdot \vec{J}_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Данное равенство представляет собой лемму Лоренца в дифференциальной форме. Интегрируя по объему V , ограниченному поверхностью S , получим

$$\begin{aligned} & \oint_S (\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)} - \vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) \cdot \vec{n} dS = \\ & = \int_V (\vec{E}^{(2)} \cdot \vec{J}_e^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{J}_e^{(2)} + \vec{H}^{(1)} \cdot \vec{J}_m^{(2)} - \vec{H}^{(2)} \cdot \vec{J}_m^{(1)}) dV, \end{aligned}$$

где интеграл слева взят по поверхности S , ограничивающей объем V , \vec{n} – наружная нормаль к поверхности. Это равенство называют леммой Лоренца в интегральной форме.

Предположим, что $\vec{J}_e^{(2)}(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$, $\vec{J}_m^{(2)} \equiv 0$, где \vec{a} – некоторый единичный вектор, \vec{r} – точка наблюдения, \vec{r}_0 – точка истока (внутри объема). Таким образом, поля $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ мы предполагаем, созданными электрическим диполем, расположенным в точке \vec{r}_0 , электрический момент которого равен $\vec{a}/j\omega$. Обозначим это поле индексом “ a ”:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_a(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad \vec{H}^{(2)} = \vec{H}_a(\vec{r}, \vec{r}_0).$$

Индексом (1) обозначим поля и токи

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{H}^{(1)} = \vec{H}(\vec{r}), \quad \vec{J}_e^{(1)} = \vec{J}_e(\vec{r}), \quad \vec{J}_m^{(1)} = \vec{J}_m(\vec{r}).$$

В этих предположениях и с принятыми обозначениями из выражения для леммы Лоренца (\vec{n} – наружная нормаль) получаем

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}_a + \vec{H} \times \vec{E}_a) \cdot \vec{n} dS = -\vec{E}(\vec{r}_0) \cdot \vec{a} + \int_V (\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a) dV,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_0) \cdot \vec{a} &= \int_V [\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a(\vec{r}, \vec{r}_0) - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a(\vec{r}, \vec{r}_0)] dV + \\ &+ \oint_S (\vec{H}_a \times \vec{E} - \vec{E}_a \times \vec{H}) \cdot \vec{n} dS = \\ &= \int_V (\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a) dV + \oint_S [(\vec{E} \times \vec{n}) \cdot \vec{H}_a + (\vec{H} \times \vec{n}) \cdot \vec{E}_a] dS. \end{aligned}$$

Если считать, что поле вне поверхности S равно нулю, то на самой поверхности следует ввести поверхностные токи

$$\vec{K}_e = \vec{H} \times \vec{n}, \quad \vec{K}_m = -\vec{E} \times \vec{n},$$

где \vec{n} – наружная нормаль. Тогда поле в точке \vec{r}_0 выражается через поверхностные токи:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) \cdot \vec{a} = \int_V (\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a) dV + \int_S (\vec{K}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{K}_m \cdot \vec{H}_a) dS.$$

Данное соотношение показывает, что заданные на поверхности S тангенциальные составляющие \vec{E} и \vec{H} могут быть заменены соответствующим образом распределенными токами.

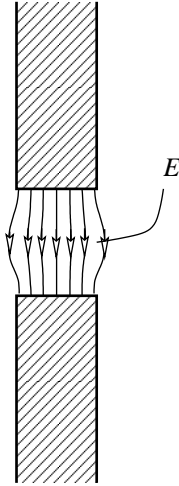
Найденные выше соотношения позволяют найти проекцию вектора \vec{E} на направление вектора \vec{a} . Чтобы найти векторную функцию \vec{E} полностью, необходимо задать три ортогональных вектора \vec{a} , найдя соответствующие решения для \vec{E}_a . Совокупность трех векторных функций $\vec{E}_a(\vec{r}, \vec{r}_0)$ образует тензорную функцию, которую называют тензором Грина. Знание тензора Грина позволяет найти решения уравнений Максвелла по заданным объемным и поверхностным токам.

Следует отметить, что граничные условия для тензора Грина устанавливаются произвольно. Проще всего найти поле диполя в свободном пространстве, но в этом случае для нахождения решений уравнений Максвелла по заданным токам должны быть заданы тангенциальные составляющие на поверхности S как электрического, так и магнитного полей (или соответствующие поверхностные токи). Если же для тензора Грина задать специальные граничные условия, то задача может быть упрощена. Например, найдем поле электрического диполя \vec{E}_a, \vec{H}_a с граничным условием

$$\vec{E}_{at} = 0 \text{ на } S,$$

т.е. равенство нулю тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности S (как на идеально проводящей поверхности). Тогда один из поверхностных интегралов, а именно, содержащий электрический поверхностный ток, обращается в нуль. Искомое решение уравнений Максвелла в этом случае выражается только через поверхностный магнитный ток или через тангенциальную составляющую электрического поля на поверхности S :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}_0) \cdot \vec{a} &= \int_V (\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a) dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{n}) \cdot \vec{H}_a dS = \\ &= \int_V (\vec{J}_e \cdot \vec{E}_a - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_a) dV - \oint_S \vec{K}_m \cdot \vec{H}_a dS.\end{aligned}$$

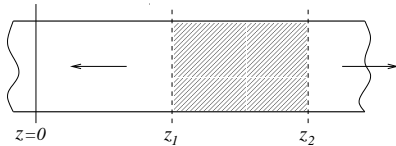


Для идеально проводящих поверхностей тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю и отличается от нуля лишь на прорезанных в стенках отверстиях. Из предыдущего следует, что отверстия могут быть заменены соответствующим распределением магнитных токов на стенках.

Если отверстие перерезает поверхностные токи, то между краями отверстия возникает электрическое поле (см. рис.). Заменяя это поле магнитными токами, граничную задачу можно заменить задачей о нахождении поля, определяемого токами.

5.2. Возбуждение волноводов электрическими и магнитными токами

Предположим, что все источники поля в волноводе расположены в области $z_1 < z < z_2$ (см. рис.). Вне этой области поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла и однородным граничным условиям на стенках волновода. Для того чтобы задача решалась однозначно, поля



следует также подчинить условию излучения, которое требует, чтобы слева от z_1 волны распространялись только в сторону отрицательных z , а справа от z_2 — в сторону положительных z .

Решение справа может быть записано в виде

$$\vec{E}_{\text{пр}} = \sum_m A_m \vec{E}_m e^{-\gamma_m z}, \quad \vec{H}_{\text{пр}} = \sum_m A_m \vec{H}_m e^{-\gamma_m z},$$

а слева

$$\vec{E}_{\text{лев}} = \sum_m B_m \vec{E}_{-m} e^{\gamma_m z}, \quad \vec{H}_{\text{лев}} = \sum_m B_m \vec{H}_{-m} e^{\gamma_m z}.$$

Здесь \vec{E}_m, \vec{H}_m – векторные функции сечения, соответствующие распространению в сторону $+z$, а $\vec{E}_{-m}, \vec{H}_{-m}$ – в сторону $-z$. Поперечные и продольные компоненты этих функций удовлетворяют соотношениям

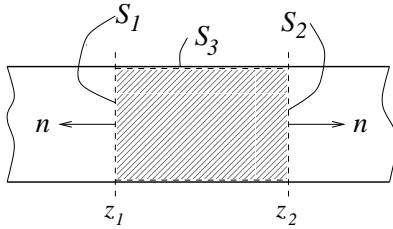
$$\begin{aligned} \vec{E}_{-m}^{\text{поп}} &= \vec{E}_m^{\text{поп}}, & \vec{H}_{-m}^{\text{поп}} &= -\vec{H}_m^{\text{поп}}, \\ \vec{E}_{-m}^{\text{прод}} &= -\vec{E}_m^{\text{прод}}, & \vec{H}_{-m}^{\text{прод}} &= \vec{H}_m^{\text{прод}}. \end{aligned}$$

Кроме того, отметим, что поперечные векторные функции можно считать вещественными, поскольку их начальная фаза может заключаться в A_m и B_m .

Для определения коэффициентов A_m и B_m может быть использована лемма Лоренца. Для этого в лемме Лоренца положим $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ – поля, возбуждаемые заданными токами \vec{J}_e, \vec{J}_m ,

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_{-n} e^{\gamma_n z}, \quad \vec{H}^{(2)} = \vec{H}_{-n} e^{\gamma_n z}, \quad \vec{J}_e^{(2)} \equiv 0, \quad \vec{J}_m^{(2)} \equiv 0.$$

Поверхность S выберем, как показано на рис. ($S = S_1 + S_2 + S_3$).



Интеграл по поверхности стенок (S_3) обращается в нуль, так как на ней тангенциальные составляющие $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$ равны нулю. Остаются только интегралы по S_1 и S_2 :

$$\int_{S_1} \left[- \sum_m B_m (\vec{E}_{-m} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_m z} e^{\gamma_n z} + \sum_m B_m (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-m}) \vec{z}_0 e^{\gamma_m z} e^{\gamma_n z} \right] dS +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{S_2} \left[\sum_m A_m (\vec{E}_m \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} e^{-\gamma_m z} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_m A_m (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_m) \vec{z}_0 e^{-\gamma_m z} e^{\gamma_n z} \right] dS = \\
& = \int_V (\vec{E}_{-n} \vec{J}_e e^{\gamma_n z} - \vec{H}_{-n} \vec{J}_m e^{\gamma_n z}) dV.
\end{aligned}$$

Учитывая условия ортогональности и соотношения между поперечными составляющими полей противоположного направления распространения, нетрудно видеть, что слагаемые, содержащие интегралы по S_1 , исчезают (слагаемые с $m \neq n$ — вследствие ортогональности, слагаемые с $m = n$ — взаимно уничтожаются). Слагаемые с интегралами по S_2 складываются, так как $(\vec{E}_n \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 = -(\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_n) \vec{z}_0$.

В результате получаем

$$-2 \int_S A_n (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS = \int_V (\vec{E}_{-n} \vec{J}_e e^{\gamma_n z} - \vec{H}_{-n} \vec{J}_m e^{\gamma_n z}) dV.$$

Интеграл слева берется по произвольному сечению волновода, так как подынтегральное выражение не зависит от z .

Интеграл

$$\int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS$$

определяется нормировкой. Так как $\vec{H}_n^{\text{поп}} = \frac{1}{Z_n} (\vec{z}_0 \times \vec{E}_n^{\text{поп}})$, то

$$(\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 = \frac{1}{Z_n} (\vec{E}_n^{\text{поп}})^2, \text{ откуда следует, что } \int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS = \frac{1}{Z_n} \int_S (\vec{E}_n^{\text{поп}})^2 dS.$$

Если принять нормировку для поперечных функций

$$\int_S (\vec{E}_n^{\text{поп}})^2 dS = 1,$$

$$\text{то } \int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS = \frac{1}{Z_n}.$$

Тогда

$$A_n = -\frac{1}{2} Z_n \cdot \int_V (\vec{E}_{-n} \vec{J}_e e^{\gamma_n z} - \vec{H}_{-n} \vec{J}_m e^{\gamma_n z}) dV.$$

Аналогично можно найти величины B_n :

$$B_n = -\frac{1}{2} Z_n \int_V (\vec{E}_n \vec{J}_e e^{-\gamma_n z} - \vec{H}_n \vec{J}_m e^{-\gamma_n z}) dV.$$

Полученные формулы справедливы для полей вне области, в которой имеются токи. В области, занятой токами, необходимо учитывать поля, создаваемые непосредственно зарядами и токами (так как в этой области $\text{div } \vec{E} \neq 0$).

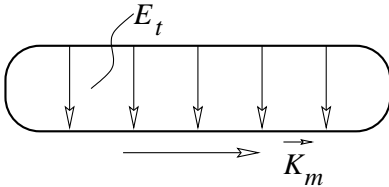
Если поля в волноводе возбуждаются только электрическими токами, то

$$A_n = -\frac{1}{2} Z_n \int_V \vec{E}_{-n} \vec{J}_e e^{\gamma_n z} dV,$$

$$B_n = -\frac{1}{2} Z_n \int_V \vec{E}_n \vec{J}_e e^{-\gamma_n z} dV.$$

Из полученных формул видно, что наиболее эффективно возбуждаются те волны, для которых распределение электрических токов, их направление и фаза совпадают с распределением электрического поля.

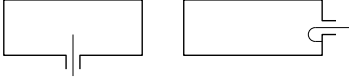
Аналогично этому направление щели в стенке волновода для эффективного возбуждения должно совпадать с направлением магнитного поля (так как магнитный ток течет вдоль щели) (см. рис.).



Так как токи в стенках до прорезания щели перпендикулярны магнитному полю, то щель должна перерезать линии токов в стенках (см. рис.).

Возбуждение волноводов осуществляют также с помощью антенны и петли.

Антенна (штырь) представляет собой стержень, по которому текут токи, поэтому антенну помещают в максимум электрического поля (см. рис.).



Петля эквивалентна магнитному диполю. Ее необходимо помещать в максимум магнитного поля, причем плоскость петли должна быть перпендикулярна магнитному полю (см. рис.).

Щель прорезают перпендикулярно токам в стенке, где токи максимальны.

Нередко волновод бывает закорочен с одной стороны. В этом случае слева от S_1 имеются волны, распространяющиеся в обе стороны, удовлетворяющие граничным условиям на замыкающей перемычке:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{лев}} &= \sum_m B_m (\vec{E}_{-m} e^{\gamma_m z} - \vec{E}_m e^{-\gamma_m z}), \\ \vec{H}_{\text{лев}} &= \sum_m B_m (\vec{H}_{-m} e^{\gamma_m z} - \vec{H}_m e^{-\gamma_m z}).\end{aligned}$$

Данное поле удовлетворяет граничному условию на короткозамыкающей перемычке при $z = 0$.

В этом случае при вычислении A_n следует положить

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(2)} &= \vec{E}_{-n} e^{\gamma_n z} - \vec{E}_n e^{-\gamma_n z}, \\ \vec{H}^{(2)} &= \vec{H}_{-n} e^{\gamma_n z} - \vec{H}_n e^{-\gamma_n z}.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае интеграл по S_1 обращается в нуль. Интеграл по S_2 имеет тот же вид, поэтому

$$\begin{aligned}A_n &= -\frac{1}{2} Z_n \int_V [(\vec{E}_{-n} e^{\gamma_n z} - \vec{E}_n e^{-\gamma_n z}) \cdot \vec{J}_e - \\ &\quad - (\vec{H}_{-n} e^{\gamma_n z} - \vec{H}_n e^{-\gamma_n z}) \cdot \vec{J}_m] dV.\end{aligned}$$

Пусть, например, волновод возбуждается антенной, расположенной на расстоянии l от закорачивающей перемычки. Тогда можно считать, что токи \vec{J}_e сосредоточены в плоскости $z = l$ и поэтому ($\gamma_n = j\beta_n$)

$$A_n = -\frac{1}{2} Z_n \int_V (\vec{E}_{-n} e^{j\beta_n l} - \vec{E}_n e^{-j\beta_n l}) \cdot \vec{J}_e dV.$$

Так как токи текут только в поперечной плоскости, то играют роль только поперечные компоненты E_n ; поэтому можно заменить E_n на E_{-n} . Тогда получим

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{1}{2} Z_n \int_V (e^{j\beta_n l} - e^{-j\beta_n l}) \cdot \vec{E}_{-n} \cdot \vec{J}_e dV = \\ &= -j Z_n \sin \beta_n l \int_V \vec{E}_{-n} \cdot \vec{J}_e dV. \end{aligned}$$

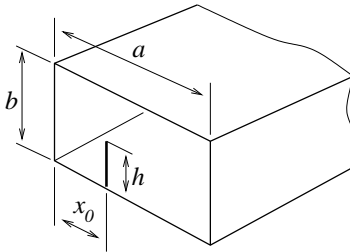
Очевидно, что возбуждение будет наиболее эффективно при $\beta_n l = \frac{\pi}{2}$, т.е. $l = \frac{\Lambda}{4}$.

Если проинтегрировать плотность тока по сечению антенны, то получим ток \vec{I}_e . Тогда

$$A_n = -j Z_n \sin \beta_n l \int_l \vec{E}_{-n} \vec{I}_e dl,$$

где интеграл берется вдоль антенны.

В качестве примера рассмотрим возбуждение прямоугольного волновода штырем, в котором задано распределение тока (см. рис.).



Нормированная функция E_{10} имеет вид

$$E_{10y} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Волновое сопротивление равно

$$Z_{10} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}},$$

где

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Подставляя E_{10y} в интеграл, получим величину A_{10} :

$$A_{10} = -j \frac{\zeta \sin \beta l}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} \int_0^h \vec{I}_e d\vec{l}.$$

Обозначим

$$\int_0^h \vec{I}_e d\vec{l} = I_0 h_d,$$

где I_0 – ток у основания штыря, h_d – действующая высота штыря. Тогда

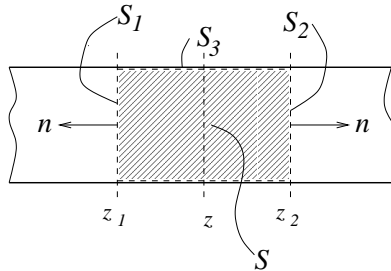
$$A_{10} = -j \frac{\zeta \sin \beta l}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin \frac{\pi x_0}{a} I_0 h_d.$$

Электрическое поле равно

$$E = A_{10} E_{10} = -j \frac{\zeta \sin \beta l}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}} \frac{2}{ab} \sin \frac{\pi x_0}{a} I_0 h_d \sin \frac{\pi x}{a}.$$

5.3. Другой вывод формулы возбуждения электрическими и магнитными токами

Заданы токи в волноводе в области $z_1 < z < z_2$ (см. рис.).



Поля можно записать следующим образом:

1. В сечении S

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_m \left\{ A_m(z) \cdot \vec{E}_m^{\text{ноп}}(x, y) + A_{-m}(z) \cdot \vec{E}_{-m}^{\text{ноп}}(x, y) \right\} + \vec{E}_z.$$

2. В сечении S_1

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_m A_{-m}(z) \cdot \vec{E}_{-m}^{\text{ноп}}(x, y) + \vec{E}_z.$$

3. В сечении S_2

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_m A_m(z) \cdot \vec{E}_m^{\text{ноп}}(x, y) + \vec{E}_z.$$

Здесь $\vec{E}_m^{\text{ноп}}$, $\vec{E}_{-m}^{\text{ноп}}$ – поперечные собственные функции волновода при распространении соответственно в положительном и отрицательном направлении оси z .

Аналогично для магнитного поля:

1. В сечении S

$$\vec{H}(x, y, z) = \sum_m A_m(z) \cdot \vec{H}_m^{\text{ноп}}(x, y) + A_{-m}(z) \cdot \vec{H}_{-m}^{\text{ноп}}(x, y) + \vec{H}_z.$$

2. В сечении S_1

$$\vec{H}(x, y, z) = \sum_m A_{-m}(z) \cdot \vec{H}_{-m}^{\text{ноп}}(x, y) + \vec{H}_z.$$

3. В сечении S_2

$$\vec{H}(x, y, z) = \sum_m A_m(z) \cdot \vec{H}_m^{\text{ноп}}(x, y) + \vec{H}_z.$$

Коэффициенты A_m и A_{-m} могут быть найдены с помощью леммы Лоренца

$$\oint_S (\vec{E}^{(1)} \times \vec{H}^{(2)} - \vec{E}^{(2)} \times \vec{H}^{(1)}) \cdot \vec{n} dS = \int_V (\vec{E}^{(2)} \cdot \vec{J}^{(1)} - \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)}) dV.$$

Здесь S – произвольная замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , \vec{n} – внешняя относительно поверхности S нормаль, $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$, $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ – поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла с токами $\vec{J}^{(1)}$, $\vec{J}^{(2)}$.

Пусть $\vec{E}^{(1)}$, $\vec{H}^{(1)}$ – искомые поля.

$$1. \vec{E}^{(2)} = \vec{E}_{-n} \cdot e^{\gamma_n z}, \quad \vec{H}^{(2)} = \vec{H}_{-n} \cdot e^{\gamma_n z}, \quad \vec{J}^{(2)} = 0.$$

Здесь $\vec{E}_{-n} \cdot e^{\gamma_n z}$ и $\vec{H}_{-n} \cdot e^{\gamma_n z}$ – собственные функции n -й моды пустого волновода, соответствующие отрицательному направлению распространения. Область интегрирования – участок волновода от S до S_1 .

Интеграл по S_3 обращается в нуль как при отсутствии, так и при наличии потерь (см. [1], с.431). Поэтому слева в лемме Лоренца остаются лишь интегралы по S_1 и S , причем \vec{E}_z и \vec{H}_z исчезают:

$$\begin{aligned} & - \int_{S_1} \left\{ \sum_m A_{-m} (\vec{E}_{-m}^{\text{нон}} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} - \sum_m A_{-m} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-m}^{\text{нон}}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS + \\ & + \int_S \sum_m \left\{ A_m (\vec{E}_m^{\text{нон}} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} + A_{-m} (\vec{E}_{-m}^{\text{нон}} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS - \\ & - \int_S \sum_m \left\{ A_m (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_m^{\text{нон}}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} + A_{-m} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-m}^{\text{нон}}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS = \end{aligned}$$

Интегралы, содержащие произведения собственных функций с различными индексами исчезают вследствие ортогональности. В результате, в суммах под интегралами остается по одному слагаемому

$$\begin{aligned} & = - \int_{S_1} \left\{ A_{-n} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} - A_{-n} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS + \\ & + \int_S \left\{ A_n (\vec{E}_n \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} + A_{-n} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS - \\ & - \int_S \left\{ A_n (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} + A_{-n} (\vec{E}_{-n} \times \vec{H}_{-n}) \vec{z}_0 e^{\gamma_n z} \right\} dS = \end{aligned}$$

В интеграле по S_1 слагаемые взаимно уничтожаются, в интеграле по S уничтожаются второе и четвертое слагаемые. Первое и третье слагаемые

в интеграле по S , наоборот, складываются при замене $-n$ на n с одно-
временной переменной знаков в соответствии с правилом $H_{-n} = -H_n$,
 $E_{-n} = E_n$

$$= -2A_n \cdot e^{\gamma_n z} \int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS = \int_{V(z_1, z)} \vec{J} \cdot \vec{E}_{-n} e^{\gamma_n z} dV.$$

Отсюда находим

$$A_n(z) = -\frac{1}{2} e^{-\gamma_n z} \frac{\int \vec{J} \cdot \vec{E}_{-n} e^{\gamma_n z} dV}{\int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS}.$$

2. Пусть $E^{(2)} = E_n e^{-\gamma_n z}$, $H^{(2)} = H_n e^{-\gamma_n z}$. Область интегрирования
– участок волновода от S до S_2 . Аналогично получаем

$$A_{-n}(z) = -\frac{1}{2} e^{\gamma_n z} \frac{\int \vec{J} \cdot \vec{E}_n e^{-\gamma_n z} dV}{\int_S (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) \vec{z}_0 dS}.$$

Продольные компоненты находятся с помощью уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}.$$

Из второго уравнения

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot}_z \vec{H} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \text{rot}_z \vec{H}^{\text{ноп}} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J}_z = \\ &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \sum_m \left\{ A_m(z) \text{rot}_z \vec{H}_m^{\text{ноп}} + A_{-m}(z) \text{rot}_z \vec{H}_{-m}^{\text{ноп}} \right\} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J}_z. \end{aligned}$$

Такое выражение получается потому, что $\text{rot}_z \vec{H}_m^{\text{ноп}}$ не содержит диф-
ференцирования по z , поэтому $A_m(z)$ и $A_{-m}(z)$ выходят из-под знака
 rot_z .

Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$\text{rot} (\vec{H}_m \cdot e^{-\gamma_m z}) = j\omega\varepsilon \cdot \vec{E}_m e^{-\gamma_m z},$$

откуда

$$\operatorname{rot}_z \vec{H}_m = j\omega\varepsilon \cdot \vec{E}_{mz}.$$

Таким образом,

$$E_z = \sum_m [A_m(z)E_{mz} + A_{-m}(z)E_{mz}] - \frac{1}{j\omega\varepsilon} J_z.$$

Складывая поперечное и продольное поля, находим полное поле:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_m [A_m(z) \cdot \vec{E}_m + A_{-m}(z) \cdot \vec{E}_{-m}] - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{J}_z.$$

Аналогично для магнитного поля получаем

$$\vec{H}(x, y, z) = \sum_m [A_m(z) \cdot \vec{H}_m + A_{-m}(z) \cdot \vec{H}_{-m}].$$

6. РЕЗОНАТОРЫ

6.1. Свободные колебания в резонаторах

При очень коротких волнах колебательные системы, состоящие из индуктивностей и конденсаторов, осуществимы с трудом вследствие малых размеров. Кроме того, в них становятся слишком большими потери, поэтому в этой области частот основную роль играют объемные резонаторы, прежде всего закрытые.

Простейший объемный резонатор представляет собой объем, ограниченный со всех сторон металлической оболочкой. В первом приближении можно предположить, что стенки являются идеально проводящими. Если в таком объеме возбуждены электромагнитные колебания, то они будут постоянно там существовать.

6.2. Собственные функции и собственные значения.

Ортогональность собственных функций

Свободные колебания в резонаторе описываются однородными уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

При этом поля \vec{E} и \vec{H} должны удовлетворять граничным условиям на поверхности металла (идеально проводящего)

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E} &= 0, \quad \text{то есть } \vec{E}_t = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{H} &= 0, \quad \text{то есть } H_n = 0, \end{aligned}$$

где n – вектор нормали. Будем искать решение уравнений в виде

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t}, \\ \vec{H} &= \vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t}, \end{aligned}$$

где ω – пока неизвестная величина.

Подставляя эти поля в уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}.$$

Исключая \vec{H} и учитывая, что $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, получим уравнение для \vec{E}

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, Δ – лапласиан, применяемый к декартовым составляющим \vec{E} . В общем случае произвольных координат уравнение имеет вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0.$$

Данное уравнение должно быть решено при указанных ранее граничных условиях. Нетривиальное решение существует лишь при некоторых определенных значениях k_m^2 постоянной k^2 , входящей в уравнение. Эти значения называют собственными. Соответствующие им решения $\vec{E}_m(x, y, z)$ и $\vec{H}_m(x, y, z)$ называют собственными функциями.

Аналогичному уравнению удовлетворяет магнитное поле:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0.$$

Собственные значения, как можно показать, составляют бесконечную счетную последовательность, не имеющую конечных точек сгущения. Покажем, что собственные значения вещественны и положительны. Для этого вычислим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{H}_m^* \times \operatorname{rot} \vec{H}_m) &= \operatorname{rot} \vec{H}_m \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_m^* - \vec{H}_m^* \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}_m = \\ &= |\operatorname{rot} \vec{H}_m|^2 - k_m^2 \cdot |\vec{H}_m|^2. \end{aligned}$$

Интегрирование по объему резонатора дает

$$k_m^2 \int_V |\vec{H}_m|^2 dV = \int_V |\operatorname{rot} \vec{H}_m|^2 dV - \oint_S (\vec{H}_m^* \times \operatorname{rot} \vec{H}_m) \vec{n} dS.$$

Второй интеграл справа обращается в нуль в силу граничных условий и тогда

$$k_m^2 = \frac{\int_V |\operatorname{rot} \vec{H}_m|^2 dV}{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV}.$$

Полученное соотношение доказывает, что собственные значения вещественны и положительны. Так как $k_m^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$, то $\omega^2 > 0$ и ω – вещественное число. Таким образом, решения уравнения Максвелла для резонатора с идеально проводящими стенками представляют собой незатухающие электромагнитные колебания. Частоты и длины волн этих колебаний определяются следующим образом:

$$\omega_m = ck_m = \frac{k_m}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m}.$$

Одному и тому же собственному значению k_m^2 может соответствовать несколько собственных функций. Такие решения называют вырожденными.

Собственные функции обладают свойством ортогональности в том смысле, что при $k_m^2 \neq k_n^2$ имеют место равенства

$$\int_V \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n dV = 0, \quad \int_V \vec{H}_m \cdot \vec{H}_n dV = 0,$$

причем интегралы берутся по всему объему резонатора.

Чтобы это показать, запишем два уравнения, которым удовлетворяют \vec{E}_m и \vec{E}_n :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_m - k_m^2 \vec{E}_m &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_n - k_n^2 \vec{E}_n &= 0.\end{aligned}$$

Вычислим выражение

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E}_n \times \operatorname{rot} \vec{E}_m) - \operatorname{div}(\vec{E}_m \times \operatorname{rot} \vec{E}_n) &= \operatorname{rot} \vec{E}_m \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_n - \vec{E}_n \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_m - \\ - \operatorname{rot} \vec{E}_n \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_m + \vec{E}_m \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_n &= \vec{E}_m \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_n - \vec{E}_n \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}_m.\end{aligned}$$

Учитывая уравнения, которым удовлетворяют \vec{E}_m и \vec{E}_n , получим

$$\operatorname{div}(\vec{E}_n \times \operatorname{rot} \vec{E}_m) - \operatorname{div}(\vec{E}_m \times \operatorname{rot} \vec{E}_n) = (k_n^2 - k_m^2) \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n.$$

Интегрируя по объему резонатора, получим

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_V \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n dV = \oint_S (\vec{E}_n \times \operatorname{rot} \vec{E}_m - \vec{E}_m \times \operatorname{rot} \vec{E}_n) \vec{n} dS.$$

Справа интеграл равен нулю в силу граничных условий:

$$(k_n^2 - k_m^2) \int_V \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n dV = 0,$$

Так как по условию $k_m^2 \neq k_n^2$, то

$$\int_V \vec{E}_m \cdot \vec{E}_n dV = 0.$$

Аналогично доказывается второе равенство. Если \vec{E}_m и \vec{E}_n соответствуют одному и тому же собственному значению, то эти функции, вообще говоря, не ортогональны, но можно получить ортогональные функции с помощью процесса ортогонализации.

Предположим, что \vec{E}_m и \vec{H}_m – решения, соответствующие некоторому собственному числу, причем вырождение отсутствует. Если \vec{E}_m и \vec{H}_m – комплексные функции, то их можно представить в виде суммы вещественной и мнимой частей

$$\vec{E}_m = \vec{E}_m^{(r)} + \vec{E}_m^{(i)}, \quad \vec{H}_m = \vec{H}_m^{(r)} + \vec{H}_m^{(i)}.$$

Нетрудно видеть, что в резонаторе без потерь граничным условиям должны удовлетворять отдельно вещественная и мнимая части \vec{E}_m и \vec{H}_m , т.е.

$$\vec{E}_{mt}^{(r)} = 0, \quad \vec{E}_{mt}^{(i)} = 0, \quad H_{mn}^{(r)} = 0, \quad H_{mn}^{(i)} = 0 \quad \text{на } S.$$

Подставляя \vec{E}_m и \vec{H}_m в уравнения Максвелла и разделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_m^{(r)} &= -j\omega_m \mu \cdot \vec{H}_m^{(i)}, & \operatorname{rot} \vec{E}_m^{(i)} &= -j\omega_m \mu \cdot \vec{H}_m^{(r)}, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_m^{(i)} &= j\omega_m \varepsilon \cdot \vec{E}_m^{(r)}, & \operatorname{rot} \vec{H}_m^{(r)} &= j\omega_m \varepsilon \cdot \vec{E}_m^{(i)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\vec{E}_m^{(r)}$ и $\vec{H}_m^{(i)}$ также удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям и, следовательно, при отсутствии вырождения могут отличаться от \vec{E}_m и \vec{H}_m только постоянным множителем. То же можно сказать относительно $\vec{E}_m^{(i)}$ и $\vec{H}_m^{(r)}$. Так как множитель несуществен, то в качестве собственных функций можно принять, например, $\vec{E}_m^{(r)}$ и $\vec{H}_m^{(i)}$. Это означает, что электрическое поле во всех точках резонатора колеблется в одной и той же фазе. Магнитное поле также колеблется во всех точках в одной фазе, но со сдвигом на 90° относительно электрического поля.

Сказанное справедливо лишь при отсутствии вырождения. Если имеет место вырождение, то это, вообще говоря, несправедливо. Пример — резонаторы бегущей волны.

Вернемся теперь к выражению для k_m^2 :

$$k_m^2 \int_V |\vec{H}_m|^2 dV = \int_V |\operatorname{rot} \vec{H}_m|^2 dV.$$

Подставляя сюда $\operatorname{rot} \vec{H}_m = j\omega_m \varepsilon \vec{E}_m$ и $k^2 = \omega_m^2 \cdot \mu \varepsilon$, получим

$$\int_V \frac{\mu |H_m|^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon |E_m|^2}{2} dV,$$

т.е. средние запасы электрической и магнитной энергий в резонаторе без потерь равны. Тот же вывод можно сделать из фазовых соотношений

для электрического и магнитного полей в случае отсутствия вырождения. Заметим, что приведенный выше вывод пригоден и при наличии вырождения.

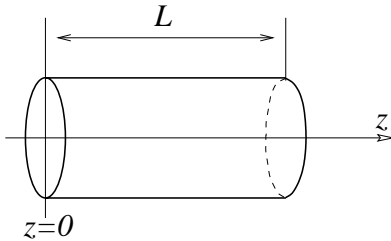
6.3. Резонаторы, образованные из отрезков линии передачи

Простейшие резонаторы получаются, если перегородить линию передачи металлическими перегородками в двух сечениях. Легко показать, что в такой системе возможны свободные колебания.

Действительно, пусть на стенку, закорачивающую волновод, падает волна. При этом вследствие полного отражения возникает стоячая волна, в которой имеются сечения, где $E_x = 0$ и $E_y = 0$. Если в такое сечение поместить металлическую перегородку, то ничего не изменится. Волна будет многократно отражаться, не затухая (при идеальной проводимости стенок). Очевидно, что это возможно, когда длина резонатора кратна длине полуволны ($\Lambda/2$) в волноводе (см. рис.).

В таких волноводных резонаторах колебательные моды делятся, как и в волноводах, на электрические и магнитные, и для их описания можно пользоваться тем же аппаратом потенциальных функций ϕ и ψ . При этом, однако, зависимость от z описывается уже не множителями $e^{\pm j\beta z}$, а множителями $\sin \beta z$ и $\cos \beta z$. Это связано с тем, что поля получаются путем суммирования прямой и обратной волн равной амплитуды.

Найдем, например, поля магнитных мод.



Для волновода (прямая волна)

$$H_z = (k^2 - \beta^2)\psi e^{-j\beta z}.$$

Поле в резонаторе получается путем вычитания падающей и отраженной волн (чтобы удовлетворить граничному условию при $z = 0$)

$$H_z = \frac{1}{2}(k^2 - \beta^2)\psi(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -j(k^2 - \beta^2)\psi \sin \beta z.$$

Далее, для волновода

$$H_x = -j\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} e^{-j\beta z}, \quad H_y = -j\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{-j\beta z}.$$

Для резонатора соответственно

$$H_x = -\frac{1}{2}j\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = -j\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos\beta z,$$

$$H_y = -\frac{1}{2}j\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = -j\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}\cos\beta z.$$

Для волновода

$$E_x = -j\omega\mu \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} e^{-j\beta z}, \quad E_y = j\omega\mu \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} e^{-j\beta z}.$$

Для резонатора соответственно

$$E_x = -\frac{1}{2}j\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}\sin\beta z,$$

$$E_y = \frac{1}{2}j\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -\omega\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}\sin\beta z.$$

Чтобы удовлетворить граничному условию на второй перегородке, должно быть

$$\sin\beta L = 0, \quad \text{откуда } \beta L = l\pi,$$

т.е.

$$\frac{2\pi}{\Lambda} = l\pi, \quad L = l\frac{\Lambda}{2}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Можно получить также собственные значения, учитывая, что

$$\beta^2 = k^2 - g'_{mn}{}^2, \quad \beta^2 L^2 = l^2\pi^2, \quad \beta^2 = \left(\frac{\pi l}{L}\right)^2.$$

Подставляя β^2 в предыдущее выражение, получим

$$k_{mnl}^2 = g'_{mn}{}^2 + \left(\frac{\pi l}{L}\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что при $l = 0$ поле исчезает, так как для этого необходимо, чтобы $\beta = 0$ (так как $L \neq 0$).

Электрические моды в резонаторе могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 E_z &= (k^2 - \beta^2) \cdot \phi \cos \beta z, \\
 E_x &= -\beta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \sin \beta z, \\
 E_y &= -\beta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \sin \beta z, \\
 H_x &= j\omega\varepsilon \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \beta z, \\
 H_y &= -j\omega\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \cos \beta z.
 \end{aligned}$$

Граничные условия при $z = L$ выполняются также при $\sin \beta L = 0$, т.е. при $\beta L = l\pi$, откуда

$$k_{mnl}^2 = g_{mn}^2 + \left(\frac{\pi l}{L}\right)^2.$$

В этом случае при $l = 0$ (т.е. при $\beta = 0$) поле не исчезает. Обращаются в нуль лишь E_x и E_y . Это значит, что поле оказывается чисто продольным. Собственные значения при этом равны

$$k_{mn0}^2 = g_{mn}^2,$$

т.е. резонансные частоты совпадают с критическими частотами волновода и не зависят от длины резонатора.

6.4. Примеры резонаторов, образованных из отрезков линии передачи

Прямоугольный резонатор

Для прямоугольного волновода

$$g_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

откуда

$$k_{nml}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2.$$

Как видно, все размеры резонатора входят симметрично, что вполне естественно, так как в таком резонаторе любая из осей может быть принята за ось z .

Так как $g_{nm}^{(H)} = g_{nm}^{(E)}$ для прямоугольного волновода, то каждая из собственных мод резонатора является дважды вырожденной (магнитные и электрические моды). Кроме того, в таком резонаторе нет различия между магнитными и электрическими модами, так как это зависит от выбора осей.

Исключение в смысле вырождения составляют моды с одним из индексов, равным нулю, так как электрические моды с нулевым индексом отсутствуют. Для вырожденных мод свободные колебания могут быть представлены в виде суперпозиции двух собственных функций.

Круговой цилиндрический резонатор

В данном случае различают магнитные и электрические моды колебаний:

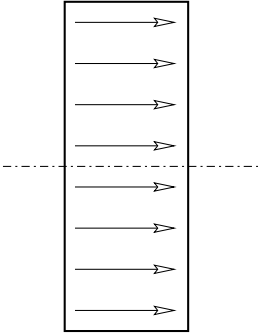
$$k_{mnl}^{(H)2} = \left(\frac{t'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2,$$

$$k_{mnl}^{(E)2} = \left(\frac{t_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2.$$

При этом, как и в круглом волноводе, при $m \neq 0$ моды дважды вырождены (поляризационное вырождение). Вырождение отсутствует для симметричных мод, т.е. для мод с $m = 0$.

Наибольший интерес представляют резонаторы с модами E_{010} и H_{01n} . Для первого резонансная частота зависит не от длины резонатора, а только от его радиуса. Величина $t_{01} \approx 2.4$. Поэтому $k_{010}^{(E)} \approx \frac{2.4}{a}$, откуда следует, что $\frac{2\pi}{\lambda_{\text{рез}}} = \frac{2.4}{a}$ и $\lambda_{\text{рез}} \approx 2.6a = 1.3d$, или $d \approx 0.75\lambda_{\text{рез}} = \frac{3}{4}\lambda_{\text{рез}}$

(точнее $0.764\lambda_{\text{рез}}$), где d – диаметр резонатора.



Такой резонатор (см. рис.) очень удобен в ускорительной технике, так как на оси продольная компонента электрического поля максимальна, а длина резонатора может быть выбрана оптимальной для ускорения частиц в зависимости от их скорости.

Для моды E_{010} имеем следующие соотношения для составляющих поля:

$$E_z = J_0(kr),$$

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_z}{dr} = \frac{k}{j\omega\mu} J_0'(kr) = j\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} J_1(kr).$$

Для резонатора с модой H_{01} имеем

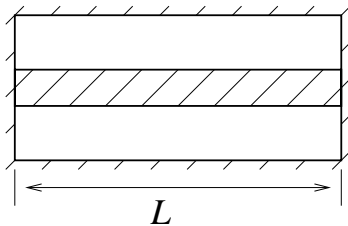
$$k_{011}^{(H)2} = \left(\frac{t'_{01}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{3.83}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Как видим, резонансная частота в этом случае зависит от длины резонатора. Благодаря малым потерям такой резонатор может иметь большую добротность.

Коаксиальные резонаторы

Отличие коаксиальных резонаторов от волноводных состоит в том, что в коаксиальной линии легче осуществить не только короткое замыкание, но и холостой ход. Поэтому здесь мы имеем тройной набор резонансных мод. Возможны три сочетания граничных условий, показанные

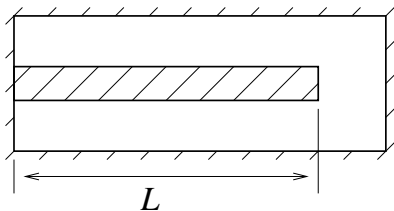
на рис.



Условие резонанса:

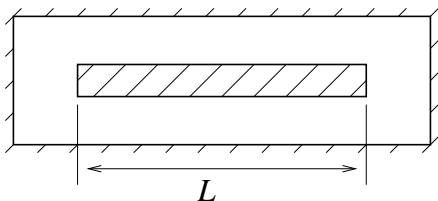
$$L = n \cdot \frac{\lambda_{\text{рез}}}{2} = \frac{\lambda_{\text{рез}}}{4} 2n$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



$$L = \frac{\lambda_{\text{рез}}}{4} (2n + 1)$$

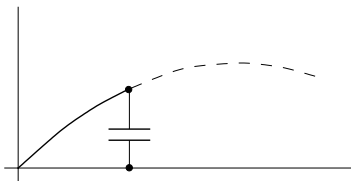
$$n = 0, 1, 2, \dots$$



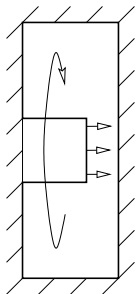
$$L = \frac{\lambda_{\text{рез}}}{4} 2n$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

В резонаторах с холостым ходом на одном или двух концах иногда необходимо учитывать конечную емкость. Учет конечной емкости приводит к удлинению резонансной волны или укорочению самого резонатора при заданной резонансной длине волны, поэтому емкость называют



укорачивающей. Концевую емкость можно искусственно увеличить, чтобы уменьшить длину резонатора. При очень сильном укорочении основная часть запасенной электрической энергии находится в



зазоре, а магнитной – в коаксиальной части, то есть электрическая и магнитная энергии пространственно разделены. Такой резонатор называют квазистатическим. Его размеры много меньше длины волны, а поля можно рассчитывать по уравнениям статических полей. Такие резонаторы применяют в ускорительной технике и СВЧ-электронике.

6.5. Приближенные методы расчета частоты свободных колебаний резонаторов

Точный расчет резонансных частот резонаторов в большинстве случаев невозможен, чаще возможен приближенный расчет с помощью численных методов. Существуют также приближенные аналитические методы, которые будут рассмотрены в данном подразделе, а именно: квазистатический метод, метод шивания, или метод частичных областей, вариационные методы и метод возмущений.

6.5.1. Квазистатический метод

Большое число объемных резонаторов принадлежит классу квазистатических резонаторов. Такие резонаторы содержат две четко разделенные области, в одной из которых существенно преобладают запасы магнитной энергии, а в другой – запасы электрической энергии. Это возможно лишь в том случае, когда размеры резонатора малы по сравнению с длиной волны.

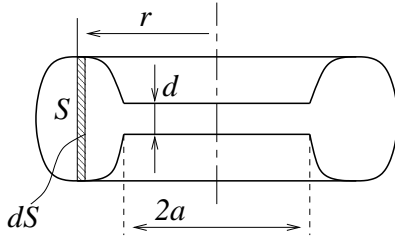
Сказанное выше позволяет при определении электрического поля пренебречь в первом уравнении Максвелла членом $\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ в электрической области и тем самым свести задачу к электростатической. При определении же конфигурации магнитного поля в магнитной области можно отбросить член $\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, и тогда магнитное поле описывается статическим уравнением

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}.$$

Итак, квазистатический метод состоит в том, что при определении конфигурации электрического и магнитного полей эти поля считаются не зависящими друг от друга и вследствие этого статическими. Условие резонанса состоит в том, что запасы энергии электрического и магнитного полей равны друг другу. Такой метод может быть применен при условии малости размеров резонатора по сравнению с длиной волны.

6.5.2. Примеры: тороидальный резонатор, резонатор “цель – отверстие”

В качестве примера рассмотрим некоторые квазистатические резонаторы.



Тороидальный резонатор образуется вращением плоской области S вокруг оси, лежащей в этой же плоскости, но не пересекающей область S (см. рис.). Электрическое поле сосредоточено в зазоре шириной d , магнитное поле – в полости S . Энергия электрического поля в зазоре равна

$$W_E = V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \pi a^2 d \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{d} \frac{U^2}{2} = \frac{CU^2}{2},$$

где $C = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{d}$, $U = dE$.

Магнитная энергия равна

$$W_H = \int_{V_H} \frac{\mu_0 H^2}{2} dV,$$

причем $H = \frac{I}{2\pi r}$, $dV = 2\pi r dS$. Интегрируя, получаем

$$W = \int_{S_H} \frac{\mu_0 H^2}{2} 2\pi r \cdot dS = \int_{S_H} \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r \cdot dS = \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \int_{S_H} \frac{dS}{r} = \frac{LI^2}{2},$$

где $L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_H} \frac{dS}{r}$.

Резонансная длина волны резонатора может быть вычислена по емкости и индуктивности C и L :

$$\lambda_{\text{рез}} = 2\pi c\sqrt{LC} = 2\pi c\sqrt{\frac{\pi a^2 \varepsilon_0}{d} \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \int_{S_H} \frac{dS}{r}} = 2\pi a\sqrt{\frac{1}{2d} \int_{S_H} \frac{dS}{r}}.$$

Интеграл $\int_{S_H} \frac{dS}{r} = \frac{S}{r_{\text{ср}}}$.

Подставляя сюда L и C , находим

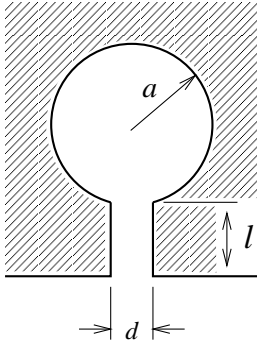
$$\lambda_{\text{рез}} = 2\pi a\sqrt{\frac{S}{2d r_{\text{ср}}}}.$$

Условие применимости квазистационарного метода в данном случае

$$\frac{S}{2d r_{\text{ср}}} \gg 1,$$

т.е. зазор d должен быть мал по сравнению с поперечными размерами области S (площадь $d r_{\text{ср}} \ll S$).

Другой пример – резонатор “щель – отверстие”, применяемый в магнетронах (см. рис.).



Магнитный поток

Этот резонатор также является квазистатическим. Если высота резонатора h значительно больше диаметра отверстия (как это обычно бывает), то магнитное поле в отверстии можно приближенно считать однородным. Магнитное поле равно

$$H = \frac{I}{h}.$$

$$\Phi = LI = \mu_0 H S = \mu_0 \frac{I}{h} \pi a^2 = \mu_0 \frac{\pi a^2}{h} I.$$

Отсюда индуктивность получается равной

$$L = \mu_0 \frac{\pi a^2}{h}.$$

Емкость конденсатора (щели) равна

$$C = \varepsilon_0 \frac{lh}{d}.$$

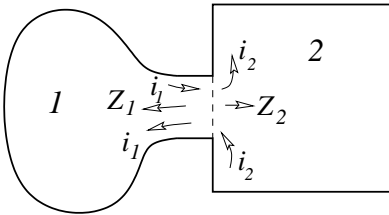
Резонансная длина волны выражается через индуктивность и емкость:

$$\lambda_{\text{рез}} = 2\pi c \sqrt{\mu_0 \frac{\pi a^2}{h} \varepsilon_0 \frac{lh}{d}} = 2\pi a \sqrt{\frac{\pi l}{d}}.$$

6.5.3. Метод частичных областей

Данный метод состоит в том, что весь резонатор разбивают на отдельные области, поля в которых известны или легко рассчитываются. Затем решения для отдельных областей “сшиваются” на поверхностях раздела между областями. Сшивание состоит в приближенном удовлетворении граничных условий на поверхностях раздела. При этом получают уравнения, из которых могут быть определены резонансные частоты.

Известны различные варианты условий на границе. Простейшее из них – условие для сопротивления на границе, которое может быть получено следующим образом. Вся область разделена на области 1 и 2 (см. рис.).



Как известно, при резонансе средние запасы электрической и магнитной энергии равны друг другу, т.е.

$$W_{E1} + W_{E2} = W_{H1} + W_{H2}.$$

Это равенство может быть записано в виде

$$(W_{H1} - W_{E1}) + (W_{H2} - W_{E2}) = 0.$$

Разности в скобках могут быть выражены через входные сопротивления:

$$W_{H1} - W_{E1} = \frac{1}{2j\omega} Z_1 \frac{1}{2} |I_1|^2,$$

$$W_{H2} - W_{E2} = \frac{1}{2j\omega} Z_2 \frac{1}{2} |I_2|^2.$$

Приравнивая сумму нулю, получим уравнение сшивания

$$Z_1 \cdot |I_1|^2 + Z_2 \cdot |I_2|^2 = 0,$$

причем Z_1 и Z_2 – полные сопротивления частичных областей на граничной поверхности. Дополнительное условие на границе состоит в том, что

$$|I_1| = |I_2|,$$

так как линии тока непрерывны. Поэтому условие на границе сводится к следующему (для двух областей):

$$Z_1 + Z_2 = 0.$$

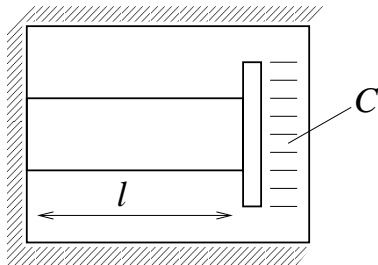
Другой вид такого граничного условия

$$Y_1 + Y_2 = 0.$$

Вычисление Z_1 и Z_2 часто производится приближенно, без учета высших мод на границе. При этом результат также получается приближенным. В случае необходимости можно учесть и высшие моды, что позволяет уточнить результат.

6.5.4. Примеры

Коаксиальная линия, нагруженная емкостью



Коаксиальная линия характеризуется волновым сопротивлением Z_0 . Пусть короткозамкнутый отрезок линии нагружен на емкость. Найдем резонансные частоты такого резонатора (см. рис.). Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии равно

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \operatorname{tg} kl,$$

так как $k = \frac{\omega}{c}$, то

$$Z_{\text{вх}} = jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l.$$

Условие резонанса

$$\frac{1}{j\omega C} + jZ_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{c} l = 0.$$

Это условие можно иначе записать в виде

$$\operatorname{ctg} \frac{\omega}{c} l = Z_0 \omega C.$$

Если обозначить $\frac{\omega}{c} l = x$, то уравнение примет вид

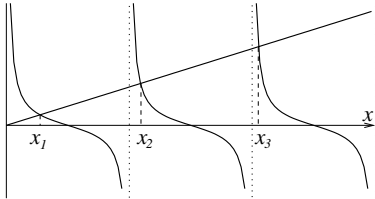
$$\operatorname{ctg} x = Ax.$$

Здесь $A = \frac{Z_0 C c}{l} = \frac{C}{C_1 l}$, где C_1 – погонная емкость линии.

Полученное трансцендентное уравнение решается графически (см. рис.).

Найдя корни x_1, x_2, \dots , можно определить резонансные длины волн, исходя из соотношения

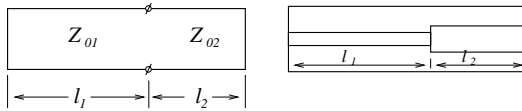
$$\lambda_n = \frac{2\pi}{x_n} l.$$



Отметим, что это решение теряет силу там, где емкость C рассматривается не как чистая емкость, а как радиальная линия.

Две коаксиальные линии с различными волновыми сопротивлениями

Устройство резонатора из двух коаксиальных линий с различным волновым сопротивлением показано на рис.



Здесь условие резонанса имеет вид

$$jZ_{01} \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c} + jZ_{02} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} = 0$$

или

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} = -\operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c}.$$

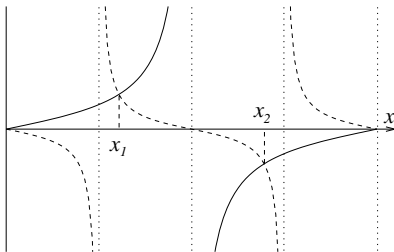
Обозначив

$$\frac{\omega l_1}{c} = x,$$

преобразуем уравнение к виду

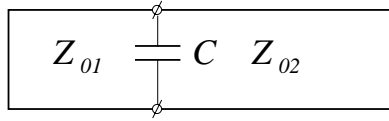
$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} \operatorname{tg} \frac{l_2}{l_1} \cdot x = -\operatorname{tg} x.$$

Данное уравнение также может быть решено графически (см. рис.). Найдя корни уравнения x , найдем резонансные длины волн.

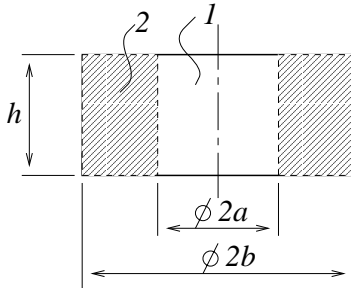


При таком решении не учитывается поле, возникающее вблизи скачкообразного изменения сечения. Это поле можно считать электростатическим. Оно эквивалентно некоторой емкости, включенной параллельно линии в месте скачка (см. рис.). С учетом емкости условие резонанса может быть записано в виде (сумма проводимостей)

$$\frac{1}{jZ_{01} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c}} + \frac{1}{jZ_{02} \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c}} + j\omega C = 0.$$



Цилиндрический резонатор, частично заполненный ферритом



Рассмотрим цилиндрический резонатор на моде E_{01} , частично заполненный ферритом, т.е. непроводящим магнетиком (см. рис.). В области 1 симметричная мода имеет электрическое поле $E_z = J_0(k_1 r)$. Магнитное поле равно

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_1} \frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{k_1}{j\omega\mu_1} J_0'(k_1 r) = -\frac{k_1}{j\omega\mu_1} J_1(k_1 r).$$

На радиусе $r = a$ ток равен

$$I = 2\pi a H_\varphi = -2\pi a \frac{k_1}{j\omega\mu_1} J_1(k_1 a).$$

Входное сопротивление для области 1 будет

$$Z_1 = \frac{E_z h}{I} = -\frac{h j\omega\mu_1 J_0(k_1 a)}{2\pi a k_1 J_1(k_1 a)}.$$

Для области 2

$$E_z = A J_0(k_2 r) + B N_0(k_2 r).$$

Отношение постоянных A/B определяется из условия на внешнем радиусе

$$A J_0(k_2 b) + B N_0(k_2 b) = 0,$$

откуда

$$\frac{B}{A} = -\frac{J_0(k_2 b)}{N_0(k_2 b)}.$$

Подставляя это в выражение для E_z , получим

$$E_z = A \frac{J_0(k_2 r) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 r)}{N_0(k_2 b)}.$$

Магнитное поле равно

$$H_\varphi = \frac{1}{j\omega\mu_2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = A \frac{k_2}{j\omega\mu_2} \frac{J'_0(k_2 r) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N'_0(k_2 r)}{N_0(k_2 b)}.$$

Входное сопротивление области 2 равно

$$Z_2 = \left. \frac{h E_z}{2\pi a H_\varphi} \right|_{r=a} = \frac{h j\omega\mu_2}{2\pi a k_2} \frac{J_0(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 a)}{J'_0(k_2 a) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N'_0(k_2 a)}.$$

Условие резонанса имеет вид

$$Z_1 + Z_2 = 0,$$

подставляя сюда Z_1 и Z_2 , получим резонансное уравнение

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \frac{J_0(k_2 r) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N_0(k_2 r)}{J'_0(k_2 r) N_0(k_2 b) - J_0(k_2 b) N'_0(k_2 r)} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} = 0.$$

Решая это уравнение, можно найти резонансные частоты резонатора и электромагнитное поле. Сочетания функций, входящие в эти уравнения, табулированы, что позволяет найти решения.

6.5.5. Вариационный метод. Формула возмущений

Вариационный метод основан на вариационных свойствах формулы

$$k^2 = \frac{\int |\text{rot } H|^2 dV}{\int |H|^2 dV},$$

где интегралы взяты по всему объему резонатора.

Если рассматривать данное соотношение как функционал относительно функции магнитного поля \vec{H} , то можно показать, что этот функционал стационарен относительно малых изменений \vec{H} , если данная функция удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0$$

при условии на границе области $\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{H} = 0$. Иначе говоря, функционал стационарен, если \vec{H} является решением уравнений Максвелла и удовлетворяет обычным электродинамическим граничным условиям.

Доказательство. Запишем соотношение в виде

$$k^2 \int_V |H|^2 dV = \int_V |\operatorname{rot} \vec{H}|^2 dV.$$

Будем варьировать функцию \vec{H} , предполагая для упрощения \vec{H} вещественной функцией координат. Заметим, что аналогично можно доказать стационарность (несколько более громоздко) и не делая этого предположения. Получаем

$$\delta k^2 \int_V |H|^2 dV + 2k^2 \int_V \vec{H} \delta \vec{H} dV = 2 \int_V \operatorname{rot} \vec{H} \operatorname{rot} \delta \vec{H} dV.$$

Теперь воспользуемся тождеством векторного анализа

$$\operatorname{div} (\delta \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H} - \delta \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H},$$

откуда

$$\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \delta \vec{H} = \delta \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} + \operatorname{div} (\delta \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}).$$

Подставляя это в ранее найденное уравнение, получим

$$\delta k^2 \int_V |\vec{H}|^2 dV = 2 \int_V (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} - k^2 \vec{H}) \cdot \delta \vec{H} dV + \int_V \operatorname{div} (\delta \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}) dV.$$

Заменяя интеграл от дивергенции поверхностным интегралом, имеем

$$\delta k^2 \int_V |\vec{H}|^2 dV = 2 \int_V (\text{rot rot } \vec{H} - k^2 \vec{H}) \cdot \delta \vec{H} dV - \oint_S (\vec{n} \times \text{rot } \vec{H}) \cdot \delta \vec{H} dS.$$

Из полученного соотношения следует, что $\delta k^2 = 0$ вследствие произвольности $\delta \vec{H}$ только при условии:

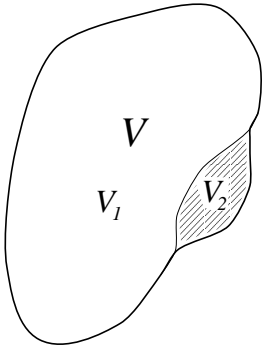
- 1) $\text{rot rot } \vec{H} - k^2 \vec{H} = 0$ во всем объеме V и
- 2) $\vec{n} \times \text{rot } \vec{H} = 0$ на поверхности S , ограничивающей этот объем.

Таким образом, электродинамическое граничное условие является в данном случае естественным граничным условием вариационной задачи. Поэтому функции сравнения не обязательно должны удовлетворять граничным условиям.

Мы доказали, что k^2 стационарно при \vec{H} , являющейся одной из собственных функций резонатора.

Свойство стационарности позволяет применить метод Ритца, например, для нахождения собственных функций и собственных значений.

Другой вариант – подстановка в функционал приближенной функции поля. В этом случае стационарность дает возможность уменьшить погрешность. В частности, таким образом можно получить так называемую формулу возмущений.



Пусть, например, резонатор деформирован так, что его объем V превратился в объем V_1 за счет исключения малого объема V_2 (см. рис.). Выясним, как изменится собственное значение k_1^2 :

$$k^2 = \frac{\int_{V_1} |\text{rot } \vec{H}^{(2)}|^2 dV}{\int_{V_1} |\vec{H}^{(2)}|^2 dV},$$

где $\vec{H}^{(2)}$ – собственная функция деформированного резонатора. Пользуясь стационарностью k^2 , вместо $\vec{H}^{(2)}$ подставим $\vec{H}^{(1)}$ – собственную функцию недеформированного резонатора. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
k^2 &\approx \frac{\int_{V_1} |\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}|^2 dV}{\int_{V_1} |\vec{H}^{(1)}|^2 dV} = \frac{\int_V |\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}|^2 dV - \int_{V_2} |\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}|^2 dV}{\int_V |\vec{H}^{(1)}|^2 dV - \int_{V_2} |\vec{H}^{(1)}|^2 dV} = \\
&= k_1^2 \left\{ 1 + \frac{\int_{V_2} |\vec{H}^{(1)}|^2 dV}{\int_V |\vec{H}^{(1)}|^2 dV} - \frac{\int_{V_2} |\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}|^2 dV}{\int_V |\operatorname{rot} \vec{H}^{(1)}|^2 dV} \right\} = \\
&= k_1^2 \left(1 + \frac{\Delta W_E - \Delta W_H}{W_0} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\Delta W_H = -\frac{\mu}{2} \int_{V_2} |\vec{H}^{(1)}|^2 dV - \text{приращение запасов магнитной энергии;}$$

$$\Delta W_E = -\frac{\varepsilon}{2} \int_{V_2} |\vec{E}^{(1)}|^2 dV - \text{приращение запасов электрической энергии,}$$

(так как $\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$); W_0 – полный запас энергии в резонаторе.

Полученное соотношение позволяет качественно, а в некоторых случаях и количественно оценивать изменения резонансной частоты при малых деформациях резонатора. Оно дает возможность получить еще одно важное соотношение.

Прежде всего, полученную формулу можно записать в виде

$$\frac{k^2 - k_1^2}{k_1^2} = \frac{\Delta W_E - \Delta W_H}{W_0}$$

или, учитывая, что $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$,

$$\frac{k^2 - k_1^2}{k_1^2} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\Delta W_E - \Delta W_H}{W_0}.$$

Изменения энергии могут быть выражены через плотности электрической и магнитной энергий вблизи стенки w_E и w_H :

$$\Delta W_E - \Delta W_H = (w_E - w_H) \cdot \Delta V,$$

где ΔV – изменение объема резонатора.

Однако величина $\frac{1}{2}(w_H - w_E) = p$ (p – среднее давление на стенку резонатора со стороны электромагнитного поля). Таким образом,

$$\Delta W_E - \Delta W_H = -2p\Delta V,$$

но $p\Delta V = -\Delta W_0$, где ΔW_0 есть изменение запасенной энергии электромагнитного поля при адиабатической деформации резонатора. Поэтому

$$\Delta W_E - \Delta W_H = 2\Delta W_0.$$

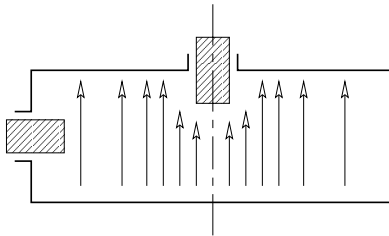
Подставляя, получим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta W_0}{W_0},$$

откуда, интегрируя, получаем соотношение

$$\frac{W_0}{\omega_0} = \text{const.}$$

Величина $\frac{W_0}{\omega_0}$, которая остается постоянной при медленной (адиабатической) деформации стенок, является адиабатическим инвариантом. Наличие адиабатического инварианта позволяет в ряде случаев определять уходы частоты при деформации стенок (см. рис.).



6.6. Потери в резонаторах

Если стенки резонатора не являются идеально проводящими, то свободные колебания будут затухающими. Математически это проявляется в том, что собственные значения приобретают мнимую часть (обычно

малую). Ее величину можно вычислить с помощью соотношения, полученного ранее:

$$k_m^2 \int_V |\vec{H}_m|^2 dV = \int_V |\text{rot } \vec{H}_m|^2 dV - \oint_S (\vec{H}_m^* \times \text{rot } \vec{H}_m) \vec{n} dS.$$

Так как $\text{rot } \vec{H}_m = j\omega_m \varepsilon \vec{E}_m$, то это соотношение может быть записано в виде

$$k_m^2 \int_V |\vec{H}_m|^2 dV = \int_V |\text{rot } \vec{H}_m|^2 dV + j\omega_m \varepsilon \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS.$$

При неидеальной проводимости поверхностный интеграл в нуль не обращается. Из этого соотношения можно найти k_m^2 :

$$k_m^2 = \frac{\int_V |\text{rot } \vec{H}_m|^2 dV}{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV} + j\omega_m \varepsilon \frac{\oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS}{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV},$$

Разделяя вещественную и мнимую части второго слагаемого, получим

$$k_m^2 = k_m'^2 + j\omega_m \varepsilon \frac{\text{Re} \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS}{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV},$$

где $k_m'^2$ – собственное значение с малой поправкой за счет вещественной части добавочного члена. Второе слагаемое дает мнимую добавку, обуславливающую затухание свободных колебаний в резонаторе. В первом приближении $k_m'^2 = \omega_m'^2 \mu \varepsilon$, $\omega_m' \approx \omega_m$.

Учитывая малость мнимой поправки, можно записать

$$\begin{aligned} k_m &\approx k_m' \left\{ 1 + j \frac{\omega_m \varepsilon}{2k_m'^2} \frac{\text{Re} \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS}{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV} \right\} = \\ &= k_m' \left\{ 1 + j \frac{\frac{1}{2} \text{Re} \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS}{2\omega_m \int_V \frac{\mu}{2} |\vec{H}_m|^2 dV} \right\}. \end{aligned}$$

В скобках

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS = P \text{ —}$$

поток энергии, направленный в стенки, т.е. мощность потерь в стенках,

$$\int_V \frac{\mu}{2} |\vec{H}_m|^2 dV = W \text{ —}$$

запас энергии в резонаторе. Отношение

$$\frac{\omega_m W}{P} = Q$$

называют добротностью резонатора, величину $P_r = \omega_m W$ — реактивной мощностью в резонаторе. Добротность, таким образом, равна отношению реактивной мощности к мощности потерь. В этих обозначениях получаем

$$k_m = k'_m \left(1 + j \frac{1}{2Q}\right).$$

Отсюда находим, что затухание происходит по экспоненциальному закону

$$e^{j\omega_m t} e^{-\omega_m t/2Q}.$$

Приведем вывод этого результата другим, более прозрачным способом. Изменение запаса энергии за время dt равно

$$dW = -P dt.$$

Мощность потерь, в свою очередь, пропорциональна запасу энергии в резонаторе, причем коэффициент пропорциональности имеет размерность обратного времени. Его можно записать в виде ω_m/Q , причем ω_m — частота свободных колебаний. Подставляя, получим

$$dW = -\frac{\omega_m}{Q} W dt,$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\omega_m t/Q},$$

причем $Q = \frac{\omega_m W}{P}$.

Вычисление потерь в стенках требует знания тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности стенки \vec{E}_{mt} , она может быть найдена с помощью граничного условия Леонтовича, справедливого при сильном скин-эффекте.

Действительно,

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \vec{n} dS = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S (\vec{n} \times \vec{E}_m) \vec{H}_m^* dS.$$

Согласно граничному условию Леонтовича

$$\vec{n} \times \vec{E}_m = \zeta \cdot \vec{H}_m,$$

где $\zeta = \frac{1+j}{\sigma\delta}$ – поверхностное сопротивление. Подставляя это под интеграл, находим

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \zeta \oint_S |\vec{H}_m|^2 dS = \frac{1}{2\sigma\delta} \oint_S |\vec{H}_m|^2 dS.$$

Подставляя мощность в выражение для Q , получим

$$Q = \frac{\omega_m \int_V \frac{\mu}{2} |\vec{H}_m|^2 dV}{\frac{1}{2\sigma\delta} \oint_S |\vec{H}_m|^2 dS} = \omega_m \mu \delta \sigma \frac{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV}{\oint_S |\vec{H}_m|^2 dS}.$$

Учитывая, что $\omega_m \sigma = \frac{2}{\delta^2 \mu_M}$, где μ_M – магнитная проницаемость металла стенки, получим

$$Q = \frac{2\mu}{\delta \mu_M} \frac{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV}{\oint_S |\vec{H}_m|^2 dS}.$$

Если известно распределение поля в резонаторе, то добротность может быть вычислена по полученной формуле. Однако определенный интерес представляет возможность сравнительно грубо производить оценку добротности. Такая оценка может быть получена, если интегралы выразить через средние значения:

$$Q = \frac{2\mu}{\delta\mu_M} \frac{V |H_m|_V^2}{S |H_m|_S^2},$$

где V – объем резонатора, S – поверхность резонатора, $|H_m|_V^2$ – средний квадрат магнитного поля по объему резонатора, $|H_m|_S^2$ – средний квадрат магнитного поля по поверхности резонатора. Введем коэффициент формы резонатора A согласно следующему соотношению:

$$2 |H_m|_V^2 = A |H_m|_S^2.$$

При таком определении для резонаторов, имеющих близкие размеры во всех направлениях, величина A близка к единице. В этих обозначениях

$$Q = \frac{V}{\delta S} \frac{\mu}{\mu_M} A = \frac{V}{V_\delta} \frac{\mu}{\mu_M} A,$$

где V_δ – объем скин-слоя. Особенно просто выглядит эта формула, если $\mu = \mu_M$ и $A = 1$. Тогда добротность равна $Q = \frac{V}{V_\delta}$. Заметим, что эта упрощенная формула не дает приличной точности, если A сильно отличается от единицы. Например, для мод типа H_{0mn} в круглом волноводе эта формула неприменима, так как при большом диаметре ($\lambda \ll \lambda_{кр}$) поле на стенках малó по сравнению с полем в объеме, благодаря чему $A \gg 1$.

Для резонаторов, имеющих примерно одинаковые размеры во всех направлениях, эту формулу можно еще упростить. Например, для куба

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad \frac{V}{S} = \frac{1}{6} a,$$

для шара

$$V = \frac{\pi d^3}{6}, \quad S = \pi d^2, \quad \frac{V}{S} = \frac{1}{6} d.$$

Приближенно можно положить

$$\frac{V}{S} = \frac{1}{6} a_{\text{ср}}.$$

Подставляя это отношение в выражение для добротности, получим оценку

$$Q \approx \frac{1}{6} \frac{a_{\text{ср}}}{\delta} \frac{\mu}{\mu_{\text{М}}} A.$$

Учитывая, что $a_{\text{ср}} \sim \lambda_{\text{рез}}$ и $\delta \sim \sqrt{\lambda_{\text{рез}}}$, находим, что

$$Q \sim \lambda^{1/2},$$

т.е. с уменьшением длины волны добротность падает.

6.6.1. Примеры расчета добротности

Расчет добротности резонатора с модой E_{010} .

Магнитное поле в таком резонаторе не зависит от координаты z . Зависимость от r имеет вид

$$H_{\varphi} = J_1(kr).$$

Интеграл по объему равен

$$\begin{aligned} \int_V |\vec{H}_m|^2 dV &= \int_0^a J_1^2(kr) 2\pi r h dr = 2\pi h \int_0^a J_1^2(kr) r dr = 2\pi h \frac{a^2}{2} J_1^2(ka) = \\ &= \pi h a^2 J_1^2(ka). \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл складывается из удвоенного интеграла по торцевой поверхности и интеграла по боковой цилиндрической поверхности:

$$\begin{aligned} \oint_S |\vec{H}_m|^2 dS &= 2 \int_0^a J_1^2(kr) 2\pi r dr + 2\pi a h J_1^2(ka) = 2 \cdot 2\pi \frac{a^2}{2} J_1^2(ka) + \\ &+ 2\pi a h J_1^2(ka) = 2\pi a(a + h) J_1^2(ka). \end{aligned}$$

Подставляя это в выражение для добротности (при $\mu_M = \mu$) получим

$$Q = \frac{2}{\delta} \frac{\pi h a^2 J_1^2(ka)}{2\pi a(a+h) J_1^2(ka)} = \frac{1}{\delta} \frac{a h}{a+h}.$$

Численный пример.

Пусть, например, резонатор из меди имеет следующие параметры:

$$a=30 \text{ см}, h=30 \text{ см}, \lambda=80 \text{ см}, \delta=2.9 \cdot 10^{-4} \text{ см}. \text{ Тогда } Q = \frac{1}{\delta} \frac{a \cdot h}{a+h} = 5 \cdot 10^4.$$

Добротность резонатора, образованного из отрезка линии, закороченного на концах.

Если длина такого резонатора велика по сравнению с поперечным размером, то в первом приближении можно пренебречь потерями в замыкающих перемычках. Тогда учитываются только потери в боковых стенках.

Ранее для затухания в волноводе мы имели следующее выражение:

$$\alpha = \Delta\beta = \frac{\pi}{2} \frac{\delta}{\lambda} \frac{\mu_M}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \frac{\oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS}.$$

Отношение интегралов, необходимое для вычисления добротности, можно вычислить следующим образом:

$$Q = \frac{2}{\delta} \frac{\mu}{\mu_M} \frac{\int_V |\vec{H}_m|^2 dV}{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS} \approx \frac{2}{\delta} \frac{\mu}{\mu_M} \frac{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS}{\oint_C |\vec{H}_m|^2 dC}.$$

В то же время из соотношения для затухания находим

$$\frac{\int_S |\vec{H}_m|^2 dS}{\oint_C |\vec{H}_m|^2 dC} = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\delta}{\lambda} \frac{\mu_M}{\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}.$$

Подставляя это отношение в выражение для добротности, получим

$$Q = \frac{\pi}{\alpha\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Полученное соотношение позволяет непосредственно оценить добротность, если известно затухание волновода, из которого образован резонатор.

Для иллюстрации вычислим добротность резонатора, образованного из круглого волновода с модой \vec{H}_{01} , для которой

$$\alpha = \frac{\pi\delta}{\alpha\lambda} \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}.$$

Подставляя это в выражение для добротности, получим

$$Q = \frac{a}{\delta} \left(\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda}\right)^2,$$

т.е. при постоянной величине $\lambda_{\text{кр}}$ (при постоянном размере) добротность растет с уменьшением длины волны как $\lambda^{-5/2}$. Потери в торцевых стенках с ростом частоты растут, поэтому имеется оптимум, когда добротность обусловлена в основном потерями в торцах.

Численный пример.

Пусть $\lambda = 10$ см, $a = 20$ см, $\lambda_{\text{кр}} = 1.64a = 33$ см, $\delta \approx 10^{-4}$ см (для меди).

Пользуясь приведенной выше формулой, получим

$$Q = 2 \cdot 10^6.$$

Пример.

В качестве другого примера вычислим добротность отрезка коаксиальной линии, для которой

$$\alpha = \frac{R_1}{2Z_0},$$

где R_1 — сопротивление единицы длины линии. Подставляя в формулу, получим

$$Q = \frac{2\pi Z_0}{R_1 \lambda}.$$

Характерно, что вычисленная таким образом (без учета потерь в торцах) добротность не зависит от числа полуволн в резонаторе. Причина очевидна.

6.6.2. Потери в среде

Если резонатор заполнен проводящей средой, то добротность определяется также потерями в этой среде.

Потери энергии равны

$$P = \int_V \frac{\sigma E^2}{2} dV,$$

а полная энергия в резонаторе выражается интегралом

$$W = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV,$$

поэтому добротность равна

$$Q = \frac{\omega W}{P} = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma}.$$

Величина

$$\frac{\sigma/\omega}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \operatorname{tg} \theta$$

тангенс угла потерь в среде, поэтому

$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Если потери есть и в стенках и в среде, то общая добротность будет

$$Q = \frac{\omega W}{P_{\text{cp}} + P_{\text{ст}}}$$

или

$$\frac{1}{Q} = \frac{P_{\text{cp}}}{\omega W} + \frac{P_{\text{ст}}}{\omega W} = \frac{1}{Q_{\text{cp}}} + \frac{1}{Q_{\text{ст}}}.$$

Таким образом, суммируются обратные величины добротностей.

Если в стенках резонатора имеются отверстия, то через них может излучаться электромагнитная энергия. Излучение может происходить в свободное пространство или волновод.

Наибольший интерес представляет излучение в согласованную линию передачи. Так как мощность излучения пропорциональна запасенной энергии, то излучение может быть охарактеризовано некоторой добротностью, которую называют внешней добротностью

$$Q_{\text{вн}} = \frac{\omega W}{P_{\text{изл}}}.$$

Добротность резонатора, нагруженного согласованной линией, называют нагруженной добротностью $Q_{\text{н}}$, а добротность собственно резонатора (определяемую потерями в резонаторе) называют собственной добротностью Q_0 .

Очевидно, что

$$\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}}.$$

Иногда для вычисления добротности используют понятие “геометрический фактор”. По определению геометрическим фактором называют величину, вычисляемую по формуле

$$G = \omega \mu_0 \frac{\int_V |H|^2 dV}{\int_S |H|^2 dS}.$$

Эта величина имеет размерность сопротивления. Поскольку аналогичное сочетание интегралов имеет место также в выражении для собственной добротности, то добротность может быть выражена следующим образом:

$$Q = \frac{G}{\zeta},$$

где

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

поверхностное сопротивление.

Ранее рассматривались свободные колебания, которые в реальном резонаторе затухают. Незатухающие колебания могут существовать в резонаторе, если мощность потерь компенсируется независимым источником. Возбуждение резонатора может осуществляться заданными токами или через границу от внешнего генератора. Последний способ может быть сведен к возбуждению поверхностными токами.

При решении задачи о вынужденных колебаниях мы будем предполагать, что известно решение задачи о свободных колебаниях для данного резонатора с обычными граничными условиями на всей поверхности, ограничивающей объем резонатора.

6.7.1. Возбуждение резонатора заданными токами

Предположим, что внутри объема резонатора заданы плотности электрического (\vec{J}_e) и магнитного (\vec{J}_m) токов. Если возбуждение осуществляется через границу, на которой задана тангенциальная составляющая электрического поля, то задача сводится к возбуждению резонатора поверхностным магнитным током с плотностью

$$\vec{K}_m = -\vec{E} \times \vec{n},$$

где \vec{n} – внешняя нормаль.

Решение задачи найдем в виде разложения по собственным векторным функциям резонатора. Однако одних собственных функций, вообще говоря, недостаточно. Действительно, собственные функции удовлетворяют условию $\text{div } \vec{E}_s = 0$ и $\text{div } \vec{H}_s = 0$, которому полное поле может не удовлетворять (так как при наличии токов имеются и заряды). Поэтому решения следует записать в виде

$$\vec{E} = \sum_s A_s \vec{E}_s - \text{grad } \varphi_e, \quad \vec{H} = \sum_s B_s \vec{H}_s - \text{grad } \varphi_m.$$

Из граничных условий для \vec{E} и \vec{H} следует, что на поверхности, ограничивающей объем резонатора,

$$\varphi_e|_S = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} \right|_S = 0.$$

Кроме того, потенциальные слагаемые поля обладают свойством ортогональности по отношению к собственным функциям. Чтобы это показать, вычислим $\text{div } (\vec{H}_s \times \text{grad } \varphi_e)$:

$$\operatorname{div}(\vec{H}_s \times \operatorname{grad} \varphi_e) = \operatorname{grad} \varphi_e \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_s = j\omega_s \varepsilon \vec{E}_s \cdot \operatorname{grad} \varphi_e.$$

Интегрируя по объему резонатора, получим

$$\oint_S (\vec{H}_s \times \operatorname{grad} \varphi_e) \cdot \vec{n} dS = j\omega \varepsilon \int_V \vec{E}_s \cdot \operatorname{grad} \varphi_e \cdot dV.$$

Отсюда (в силу граничных условий левая часть равна нулю)

$$\int_V \vec{E}_s \cdot \operatorname{grad} \varphi_e \cdot dV = 0.$$

Аналогично этому

$$\int_V \vec{H}_s \cdot \operatorname{grad} \varphi_m \cdot dV = 0.$$

Найдем уравнения для функций φ_e и φ_m . Для этого запишем уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -j\omega \mu \vec{H} - \vec{J}_m, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= j\omega \varepsilon \vec{E} + \vec{J}_e \end{aligned}$$

и возьмем дивергенцию от обоих уравнений. Получим

$$\begin{aligned} 0 &= -j\omega \mu \cdot \operatorname{div} \vec{H} - \operatorname{div} \vec{J}_e, \\ 0 &= j\omega \varepsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{J}_m. \end{aligned}$$

Дивергенция отлична от нуля только для потенциальной части \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{aligned} j\omega \mu \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m &= \operatorname{div} \vec{J}_m, \\ j\omega \varepsilon \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_e &= \operatorname{div} \vec{J}_e, \end{aligned}$$

или

$$\Delta\varphi_m = \frac{\operatorname{div} \vec{J}_m}{j\omega\mu}, \quad \Delta\varphi_e = \frac{\operatorname{div} \vec{J}_e}{j\omega\varepsilon}.$$

В то же время имеют место уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_e = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{J}_e = -j\omega\rho_e,$$

и

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_m = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{J}_m = -j\omega\rho_m.$$

Подставляя это в уравнение, убеждаемся, что φ_e и φ_m удовлетворяют статическим уравнениям Пуассона

$$\Delta\varphi_e = -\frac{\rho_e}{\varepsilon}, \quad \Delta\varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu}.$$

Чтобы найти A_s и B_s , вычислим следующие выражения:

$$\operatorname{div} (\vec{E}_s^* \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_s^* - \vec{E}_s^* \cdot \operatorname{rot} \vec{H},$$

$$\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}_s^*) = \vec{H}_s^* \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_s^*.$$

При этом следует учесть, что \vec{E}_s и \vec{H}_s удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E}_s = -j\omega_s\mu\vec{H}_s, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_s = j\omega_s\varepsilon\vec{E}_s.$$

Учитывая эти уравнения для \vec{E}_s и \vec{H}_s , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E}_s^* \times \vec{H}) &= \vec{H} \cdot (j\omega_s\mu\vec{H}_s^*) - \vec{E}_s^* \cdot (j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}_e) = \\ &= j\omega_s\mu\vec{H} \cdot \vec{H}_s^* - j\omega\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E}_s^* - \vec{J}_e \cdot \vec{E}_s^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}_s^*) &= \vec{H}_s^* \cdot (-j\omega\mu\vec{H} - \vec{J}_m) - \vec{E} \cdot (-j\omega_s\varepsilon\vec{E}_s^*) = \\ &= -j\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}_s^* + j\omega_s\varepsilon\vec{E} \cdot \vec{E}_s^* - \vec{J}_m \cdot \vec{H}_s^*. \end{aligned}$$

Интегрируя по объему резонатора и учитывая, что тангенциальные составляющие \vec{E} и \vec{E}_s равны нулю на всей поверхности S (с учетом замены \vec{E}_t магнитным током на возбуждающей границе), заменяя \vec{E} и \vec{H} их разложением в ряд и учитывая соотношения ортогональности, получим

$$j\omega_s\mu B_s \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV - j\omega\varepsilon A_s \int_V \vec{E}_s \cdot \vec{E}_s^* dV = \int_V \vec{J}_e \vec{E}_s^* dV,$$

$$-j\omega\mu B_s \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV + j\omega_s\varepsilon A \int_V \vec{E}_s \cdot \vec{E}_s^* dV = \int_V \vec{J}_m \vec{H}_s^* dV.$$

Ранее мы получили

$$\varepsilon \int_V \vec{E}_s \cdot \vec{E}_s^* dV = \mu \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV.$$

Подставляя, получим систему из двух уравнений

$$j\omega \cdot A_s - j\omega_s B_s = a_s,$$

$$j\omega_s A_s - j\omega \cdot B_s = b_s,$$

где

$$a_s = -\frac{\int_V \vec{J}_e \vec{E}_s^* dV}{\mu \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV}, \quad b_s = \frac{\int_V \vec{J}_m \vec{H}_s^* dV}{\mu \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV}.$$

Решая эту систему относительно A_s и B_s , получим

$$A_s = \frac{\omega a_s - \omega_s b_s}{j(\omega^2 - \omega_s^2)}, \quad B_s = \frac{\omega_s a_s - \omega b_s}{j(\omega^2 - \omega_s^2)}.$$

Если резонатор не имеет потерь, то ω_s – вещественная величина. Поэтому A_s и B_s обращаются в бесконечность при $\omega = \omega_s$, т.е. при резонансе. Реально рост амплитуды ограничивается потерями в резонаторе.

При наличии потерь

$$\omega_s^2 = \omega_s'^2 \left(1 + \frac{j}{Q_s}\right),$$

$$\omega^2 - \omega_s^2 = \omega^2 - \omega_s'^2 - j\frac{\omega_s'^2}{Q_s}.$$

Так как ω – вещественная величина, то знаменатель в выражениях для A_s и B_s не может обратиться в нуль. При $\omega = \omega_s$ получим

$$A_s = Q_s \frac{a_s - b_s}{\omega_s'}, \quad B_s = Q_s \frac{a_s - b_s}{\omega_s'},$$

т.е. $A_s = B_s$.

Из полученных соотношений следует, что если частота близка к одной из собственных частот, то амплитуда соответствующих полей особенно велика. Так как добротность Q_s обычно весьма большая величина, то вблизи резонанса можно пренебречь всеми нерезонансными модами в разложении \vec{E} и \vec{H} .

Запишем зависимость амплитуд вблизи резонансной частоты. При этом можно полагать $\omega \approx \omega_s'$ везде, кроме разностного члена в знаменателе. Тогда

$$\begin{aligned} A_s \approx B_s &\approx \frac{\omega_s'(a_s - b_s)}{j(\omega^2 - \omega_s'^2) + \frac{\omega_s'^2}{Q_s}} = \frac{Q_s(a_s - b_s)/\omega_s'}{1 + j\frac{Q_s}{\omega_s'^2}(\omega^2 - \omega_s'^2)} = \\ &= \frac{Q_s(a_s - b_s)/\omega_s'}{1 + jQ_s x}, \end{aligned}$$

где

$$x = \frac{\omega}{\omega_s'} - \frac{\omega_s'}{\omega} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_s'}.$$

Это резонансная зависимость с узкой полосой, определяемой величиной Q_s .

Следует отметить, что A_s и B_s точно равны друг другу при резонансной частоте. На частоте, не равной резонансной, эти коэффициенты не равны, что обуславливает неравенство запасенной электрической и магнитной энергий.

В электронных приборах СВЧ и ускорителях сквозь резонатор проходит поток заряженных частиц, сгруппированных в сгустки, благодаря чему в резонаторе могут возбуждаться электромагнитные поля. Поток заряженных частиц представляет собой электрический переменный ток.

Предположим, например, что частота сгустков, пролетающих через резонатор, равна резонансной частоте. Тогда

$$A_s = \frac{Q_s}{\omega_s} a_s = - \frac{Q_s}{\omega_s} \frac{\int_V \vec{J}_e \vec{E}_s^* dV}{\mu \int_V \vec{H}_s \cdot \vec{H}_s^* dV}.$$

Предположим, что пучок достаточно тонкий, так что в его сечении $\vec{E}_s = \text{const}$. Тогда

$$\int_V \vec{J}_e \vec{E}_s^* dV = \int_L \vec{E}_s^* \cdot \vec{I}_e dl,$$

где $\vec{I}_e = \int \vec{J}_e dS$ – ток пучка (интеграл по сечению пучка). Предположим также, что зазор, через который пролетает пучок, много меньше, чем расстояние между сгустками. Тогда можно принять, что $\vec{I}_e = \text{const}$ во всем зазоре резонатора и

$$\int_L \vec{E}_s^* \cdot \vec{I}_e dl = I_e \int_L \vec{E}_s^* d\vec{l} = -I_e U_s^*,$$

где U_s – напряжение на зазоре при единичной амплитуде ($A_s = 1$).

Подставляя, получим

$$A_s = \frac{Q_s}{\omega_s} \frac{U_s^*}{\int_V \mu |H_s|^2 dV} I_e.$$

В то же время мы имели

$$\vec{E} = A_s \cdot \vec{E}_s.$$

Интегрируя \vec{E} вдоль пучка, получим

$$U = A_s U_s.$$

Подставляя сюда найденное выше выражение для A_s , для напряжения, возбуждаемого пучком на резонаторе, получим

$$U = \frac{Q_s}{\omega_s} \frac{|U_s|^2}{\int_V \mu |H_s|^2 dV} I_e.$$

В то же время

$$\int_V \mu |H|^2 dV = 2W_s,$$

где W_s – запас энергии в резонаторе при единичной амплитуде, поэтому U – тормозящее напряжение на резонаторе равно

$$U = Q_s \frac{U_s^2}{2\omega'_s W_s} I_e = Q_s \frac{U_s^2}{2P_{rs}} I_e,$$

где $P_{rs} = \omega'_s W_s$ – реактивная мощность в резонаторе при единичной амплитуде. Величина

$$\rho_s = \frac{U_s^2}{2P_{rs}} = \frac{U_s^2}{2\omega'_s W_s} = \frac{U^2}{2\omega'_s W}$$

имеет размерность сопротивления и носит название характеристического сопротивления резонатора (отнесенного к определенному пути движения пучка). Через характеристическое сопротивление может быть выражена реактивная мощность:

$$P_r = \frac{U^2}{2\rho_s}.$$

Величина

$$R_{ш} = Q_s \rho_s$$

носит название шунтового сопротивления резонатора. Иначе шунтовое сопротивление (учитывая, что $Q_s = \frac{P_r}{P_a}$) может быть определено следующим образом:

$$R_{ш} = \frac{P_r}{P_a} \frac{U^2}{2P_r} = \frac{U^2}{2P_a}.$$

Через шунтовое сопротивление выражается активная мощность (мощность потерь)

$$P_a = \frac{U^2}{2R_{\text{ш}}}.$$

Если длина зазора составляет заметную долю расстояния между соседними сгустками, то напряжение выражается через ток несколько сложнее. В этом случае ток равен

$$I_e = I_{em} e^{-jk_e l},$$

где $k_e = \frac{\omega}{v_e}$, v_e — скорость движения электронов. Тогда

$$\int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl = I_{em} \int_L \vec{E}_s \cdot e^{-jk_e l} dl.$$

Пусть, например, $E_s = \text{const}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl &= I_{em} E_s \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_e l} dl = I_{em} E_s \frac{1}{jk_e} (e^{jk_e d/2} - e^{-jk_e d/2}) = \\ &= I_{em} E_s \frac{2 \sin k_e d/2}{k_e} = I_{em} U_s \frac{\sin \theta/2}{\theta/2}, \end{aligned}$$

где $U_s = E_s d$, $\theta = k_e d$ — угол пролета. Поэтому напряжение на зазоре

$$U = I_{em} R_{\text{ш}} \frac{\sin \theta/2}{\theta/2}.$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{\sin \theta/2}{\theta/2} —$$

пролетный фактор и запишем

$$U = I_{em} R_{\text{ш}} \alpha \text{ и } U \alpha = I_{em} R_{\text{ш}} \alpha^2.$$

Обозначим теперь

$$U_{\text{эфф}} = U \cdot \alpha \quad - \quad \text{эффektivное напряжение и } R_{\text{ш эфф}} = R_{\text{ш}} \cdot \alpha^2.$$

Тогда мощность может быть выражена через эффektivные значения:

$$P = \frac{U^2}{2R_{\text{ш}}} = \frac{U^2 \alpha^2}{2R_{\text{ш}} \alpha^2} = \frac{U_{\text{эфф}}^2}{2R_{\text{ш эфф}}}.$$

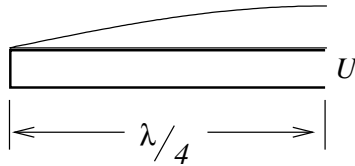
Характеристическое сопротивление также умножается на квадрат пролетного фактора

$$\rho_{\text{эфф}} = \rho \alpha^2.$$

Если частота следования сгустков в пучке не равна резонансной частоте, но близка к ней, то появляется частотный множитель

$$U = \frac{U_{\text{рез}}}{1 + jQ_s x}.$$

Пример. Четвертьволновый отрезок ТЕМ-линии (см. рис.).



Здесь распределение напряжения вдоль линии имеет вид

$$U = U_m \sin kz.$$

Запас энергии dW в элементе dz равен

$$dW = \frac{U_m^2 \sin^2 kz}{2} C_1 dz.$$

Полная запасенная энергия выражается через интеграл

$$W = \int_0^{\lambda/4} \frac{U_m^2 \sin^2 kz}{2} C_1 dz = \frac{C_1 U_m^2 \lambda}{16}.$$

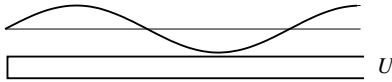
Теперь можно вычислить характеристическое сопротивление

$$\rho = \frac{U_m^2}{2\omega_0 W} = \frac{U_m^2}{2\omega_0 C_1 U_m^2 \lambda/16} = \frac{8}{\omega_0 C_1 \lambda}.$$

Так как $\lambda = c/f$, то

$$\rho = \frac{8}{2\pi C_1 c} = \frac{4}{\pi} Z_0,$$

где Z_0 – волновое сопротивление линии.



Предположим, что резонатор имеет длину $2n + 1$ четвертьволновых отрезков (см. рис.). Тогда при том же напряжении запас энергии возрастает в $2n + 1$ раз. Это приводит к уменьшению характеристического сопротивления также в $2n + 1$ раз.

Так как добротность при этом почти не изменяется, то шунтовое сопротивление также уменьшается в $2n + 1$ раз.

Пример. Резонатор E_{010}

Вычислим характеристическое сопротивление

$$\rho = \frac{U_s^2}{2\omega_s W_s}.$$

Здесь $E_z = J_0(g_{01}r)$, причем $g_{01} = \frac{t_{01}}{a} \approx \frac{2.4}{a}$. В центре ($r = 0$) $E_z = 1$, поэтому $U_s = h$. Вычислим энергию, запасенную в резонаторе:

$$W_s = \frac{\varepsilon h}{2} \int_0^a J_0^2(g_{01}r) 2\pi r dr = \pi \varepsilon h \int_0^a J_0^2(g_{01}r) r dr = \frac{\pi \varepsilon h a^2}{2} J_1^2(g_{01}a).$$

Кроме того,

$$\omega_{01} = \frac{g_{01}}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{t_{01}}{a \sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Подставляя, получим

$$\rho_{010} = \frac{h^2}{2 \frac{t_{01}}{a \sqrt{\mu \varepsilon}} \frac{\pi \varepsilon h a^2}{2} J_1^2(t_{01})} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{a} \frac{1}{\pi t_{01} J_1^2(t_{01})}.$$

Далее, $t_{01} \approx 2.4$, $J_1(t_{01}) \approx 0.52$, откуда

$$\rho_{010} \approx 0.49 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{a} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{2a} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{d}.$$

Пример.

Для иллюстрации примем: $a = 7.5$ см, $h = 2.5$ см, $\lambda = 20$ см, $\delta = 1.41 \cdot 10^{-4}$ см, $\rho_{010} = 0.49 \cdot 377 \cdot \frac{1}{3} \approx 62$ Ом.

Добротность

$$Q = \frac{1}{\delta} \frac{ah}{a+h} = \frac{1}{1.4 \cdot 10^{-4}} \frac{7.5 \cdot 2.5}{10} \approx 13 \cdot 10^3.$$

Отсюда находим шунтовое сопротивление

$$R_{\text{ш}} = 62 \cdot 13 \cdot 10^3 \approx 0.8 \cdot 10^6 \text{ Ом} = 0.8 \text{ МОм}.$$

6.7.3. Другие способы возбуждения резонаторов

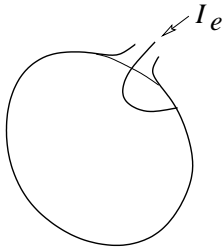
Резонаторы, так же как и волноводы, можно возбуждать штырем, петлей и через отверстие.

Если устройство для возбуждения представляет собой тонкий проводник, то амплитуда поля выражается через интеграл от тока по проводнику:

$$\int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl,$$

т.е.

$$A_s = - \frac{\int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl}{\int_V \mu |H_s|^2 dV}.$$



В качестве примера рассмотрим возбуждение резонатора петель (см. рис.). Если петля коротка, то в первом приближении ток вдоль петли можно считать постоянным. Тогда имеем

$$\int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl = I_e \oint_L \vec{E}_s d\vec{l} = I_e \int_S \text{rot } \vec{E}_s \cdot \vec{n} \cdot dS = -j\omega\mu I_e \int_S \vec{H}_s \cdot \vec{n} \cdot dS,$$

где S – поверхность, натянутая на петлю, \vec{n} – единичный вектор нормали к этой поверхности. Если петля настолько мала, что $H_s \approx \text{const}$, то

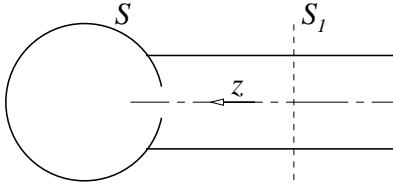
$$\int_L \vec{E}_s \cdot \vec{I}_e dl = -j\omega_s\mu \cdot \vec{H}_s \cdot \vec{n} S I_e.$$

Таким образом, интенсивность возбуждения пропорциональна площади петли и перпендикулярной к ней составляющей векторной функции \vec{H}_s . Поэтому для эффективного возбуждения петля должна быть помещена в пучности магнитного поля перпендикулярно магнитным силовым линиям.

Аналогично можно показать, что штырь (антенну) следует помещать в пучности электрического поля так, чтобы направление штыря совпадало с направлением электрических силовых линий. Отверстие необходимо размещать так, чтобы оно пересекало линии токов на поверхности.

6.8. Резонатор как элемент линии передачи

Резонатор, присоединенный к линии передачи, можно рассматривать как конечное устройство – двухполюсник, для которого может быть найдено входное сопротивление.



Рассмотрим резонатор – объем, ограниченный идеально проводящей поверхностью S , связанный с волноводом через отверстие (см. рис.). Поместим в волновод короткозамыкающую пластину в сечении S_1 . Расстояние этой пластины от отверстия выберем так, чтобы на отверстии имело место равенство

нулю тангенциальной компоненты электрического поля. Тогда одновременно в этом же месте будет равна нулю нормальная составляющая магнитного поля, т.е. выполняются граничные условия на идеально проводящей поверхности. Поэтому частота свободных колебаний сложного резонатора, состоящего из собственно резонатора и отрезка волновода с короткозамыкающей пластиной в сечении S_1 , будет равна частоте свободных колебаний резонатора без отверстия.

Собственные векторные функции такого резонатора обозначим \vec{E}_s и \vec{H}_s . Сечение S_1 при этом должно быть на таком расстоянии от отверстия, чтобы возникшие у отверстия высшие моды были близки к нулю в этом сечении. В процессе свободных колебаний электромагнитное поле проникает из резонатора в волновод, причем вблизи от короткозамыкающей пластины оно практически совпадает с полем основной моды в волновод. В силу сказанного для сечения S_1 собственные функции равны

$$\vec{E}_{st} = 0, \quad \vec{H}_{st} = j\kappa_{1s} \cdot \vec{h}(x, y),$$

где $\vec{h}(x, y)$ – поперечная векторная функция для основной моды в волновод, \vec{E}_{st} , \vec{H}_{st} – тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля на короткозамыкающей пластине, κ_{1s} – величина, характеризующая связь резонатора с волноводом. Заметим, что κ_{1s} предполагается вещественной величиной. Тогда \vec{H}_{st} – мнимая величина.

Удалим теперь пластину и рассмотрим возбуждение резонатора через волновод. В сечении S_1 (в волновод) поле имеет вид

$$\vec{E}^{\text{ноп}} = U_1 \cdot \vec{e}(x, y), \quad \vec{H}^{\text{ноп}} = I_1 \cdot \vec{h}(x, y).$$

Электромагнитное поле в резонаторе можно теперь вычислять по этому полю, заданному на поверхности сечения S_1 . Для этих вычислений поле справа от сечения S_1 может быть заменено электрическим и магнитным поверхностными токами на S_1 :

$$\begin{aligned}\vec{K}_e &= \vec{H}^{\text{ноп}} \times \vec{n} = -\vec{H}^{\text{ноп}} \times \vec{z}_0, \\ \vec{K}_m &= -\vec{E}^{\text{ноп}} \times \vec{n} = \vec{E}^{\text{ноп}} \times \vec{z}_0,\end{aligned}$$

где \vec{z}_0 – единичный вектор в направлении резонатора.

Если обратиться к разделу 6.7, то возбужденное поверхностными токами магнитное поле в резонаторе равно

$$\vec{H} = B_s \cdot \vec{H}_s.$$

Здесь B_s – коэффициент в разложении поля по собственным функциям:

$$B_s = \frac{a_s \omega - b_s \omega_s}{j(\omega^2 - \omega_s^2)},$$

где

$$a_s = -\frac{\int_{S_1} \vec{K}_e \vec{E}_s^* dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}, \quad b_s = \frac{\int_{S_1} \vec{K}_m \vec{H}_s^* dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.$$

Заметим, что $a_s = 0$, так как $\vec{E}_s = \vec{E}_{st} = 0$ на S_1 . В то же время магнитное поле H на поверхности S_1 может быть найдено с учетом того, что

$$\vec{H}^{\text{ноп}} = B_s \vec{H}_s = B_s \vec{H}_{st} = B_s j k_{1s} \vec{h}(x, y).$$

Сравнивая это с предыдущим выражением для $\vec{H}^{\text{ноп}}$, найдем

$$I_1 = j B_s \kappa_{1s}.$$

Вычислив B_s через U_1 , мы найдем связь между током и напряжением, что позволит найти входную проводимость резонатора в сечении S_1 .

Чтобы найти B_s , нужно подставить в выражение для b_s поверхностную плотность магнитного тока $\vec{K}_m = \vec{E}^{\text{ноп}} \times \vec{z}_0$:

$$\begin{aligned}
b_s &= \frac{\int_{S_1} \vec{K}_m \vec{H}_s^* dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV} = \frac{\int_{S_1} (\vec{E}^{\text{ноп}} \times \vec{z}_0) \vec{H}_s^* dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV} = \frac{\int_{S_1} (\vec{E}^{\text{ноп}} \times \vec{H}_s) \vec{z}_0 dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV} = \\
&= \frac{jk_{1s} U_1 \int (\vec{e} \times \vec{h}) \vec{z}_0 dS}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\vec{H}_s^* = -\vec{H}_s$, так как \vec{H}_s — чисто мнимая величина.

Учитывая нормировку \vec{e} и \vec{h} , для b_s получим

$$b_s = \frac{jk_{1s} U_1}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.$$

Подставляя это в выражение для B_s , получим

$$B_s = -\frac{U_1 \kappa_{1s} \omega_s}{\omega^2 - \omega_s^2} \frac{1}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.$$

Учитывая приведенное ранее выражение для тока, имеем

$$I_1 = j B_s \kappa_{1s} = \frac{\kappa_{1s}^2 \omega_s}{j(\omega^2 - \omega_s^2)} \frac{1}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV} U_1.$$

Данное соотношение позволяет найти проводимость резонатора, рассматриваемого как оконечное устройство (или нагрузка) волновода:

$$Y_1 = \frac{I_1}{U_1} = \frac{\kappa_{1s}^2 \omega_s}{j(\omega^2 - \omega_s^2)} \frac{1}{\mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.$$

Учитывая высокую добротность, это выражение можно привести к виду

$$Y_1 = \frac{1}{1 + jQ_s x} \frac{Q_s \kappa_{1s}^2}{\omega_s \mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}.$$

Можно показать, что величина

$$G_1 = \frac{Q_s \kappa_{1s}^2}{\omega_s \mu \int_V \vec{H}_s \vec{H}_s^* dV}$$

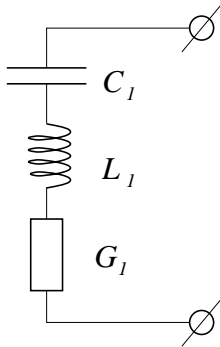
вещественна и положительна. Вещественность и положительность следуют из того, что κ_{1s} – вещественная величина. Последнее следует из соотношения, приведенного выше:

$$\vec{H}_{st} = j\kappa_{1s} \cdot \vec{h}(x, y).$$

Так как при свободных колебаниях в резонаторе поле во всех точках колеблется в одной фазе (или противофазе), то можно считать, что H_{st} – мнимая функция, \vec{h} – вещественная функция, тогда κ_{1s} вещественна.

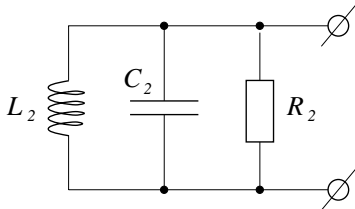
Итак, в сечении S_1

$$Y_1 = \frac{G_1}{1 + jQ_s x}.$$



Такой проводимостью обладает последовательный резонансный контур, который может быть принят в качестве эквивалентной схемы резонатора в сечении S_1 (см. рис.). Перейдем теперь к сечению S_2 , отстоящему от S_1 на расстояние $\Lambda/4$, т.е. четверть волны в волноводе. Входное сопротивление в этой плоскости

$$Z_2 = \frac{Z_0^2}{Z_1} = Z_0^2 Y_1 = \frac{Z_0^2 G_1}{1 + jQ_s x} = \frac{R_2}{1 + jQ_s x}.$$



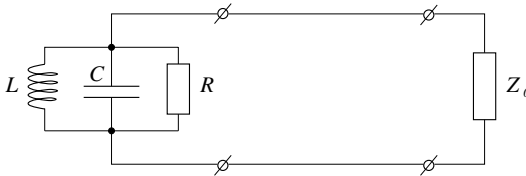
Таким сопротивлением обладает параллельный резонансный контур, который может быть принят в качестве эквивалентной схемы резонатора в сечении S_2 (см. рис.). Можно найти бесконечное число чередующихся плоскостей,

в

которых резонатор может быть представлен эквивалентной схемой последовательного или параллельного резонансного контура вблизи частоты ω'_s . Эти плоскости называют плоскостями эквивалентного представления.

Пользуясь эквивалентной схемой, можно выяснить ряд свойств резонатора, присоединенного к линии.

Если линия согласована, то для свободных колебаний имеет место схема, представленная на рис.



При этом энергия рассеивается в сопротивлении R – потери внутри резонатора, и в сопротивлении Z_0 – потери на излучение в линии. Отношение этих мощностей равно

$$\frac{P_{Z_0}}{P_R} = \frac{R}{Z_0} = \frac{Y_0}{G}.$$

В то же время

$$\frac{P_{Z_0}}{P_R} = \frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}} = \frac{R}{Z_0} = \frac{Y_0}{G}.$$

Данное отношение называют коэффициентом связи β :

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}} = \frac{R}{Z_0} = \frac{Y_0}{G} = \frac{P_{Z_0}}{P_R}.$$

Нагруженная добротность определяется соотношением

$$\frac{1}{Q_{\text{н}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}} = \frac{1}{Q_0} \left(1 + \frac{Q_0}{Q_{\text{вн}}}\right) = \frac{1}{Q_0} (1 + \beta),$$

откуда

$$Q_n = \frac{Q_0}{1 + \beta}.$$

Найдем коэффициент отражения параллельного резонансного контура, присоединенного к линии передачи с волновой проводимостью Y_0 :

$$\Gamma = \frac{Y_0 - Y_k}{Y_0 + Y_k},$$

где проводимость параллельного контура Y_k равна

$$Y_k = G(1 + jQ_0x),$$

причем $G = 1/R$.

При резонансе $x = 0$, и коэффициент отражения равен

$$\Gamma_0 = \frac{Y_0 - G}{Y_0 + G} = \frac{Y_0/G - 1}{Y_0/G + 1} = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}.$$

Данная формула позволяет определить КСВН в линии при резонансе:

$$\rho_0 = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} = \frac{\beta + 1 + |\beta - 1|}{\beta + 1 - |\beta - 1|}.$$

При $\beta > 1$ (сильная связь)

$$\rho_0 = \frac{\beta + 1 + \beta - 1}{\beta + 1 - \beta + 1} = \beta.$$

При $\beta < 1$ (слабая связь)

$$\rho_0 = \frac{\beta + 1 - \beta + 1}{\beta + 1 + \beta - 1} = \frac{1}{\beta}.$$

Мощность падающей волны рассеивается полностью в резонаторе (без отражений) при $\rho_0 = 1$, т.е. при $\beta = 1$. При этом внешняя добротность равна собственной.

При $x \neq 0$ коэффициент отражения резонатора равен

$$\Gamma = \frac{Y_0 - G(1 + jQ_0x)}{Y_0 + G(1 + jQ_0x)} = \frac{2Y_0 - [Y_0 + G(1 + jQ_0x)]}{Y_0 + G(1 + jQ_0x)} =$$

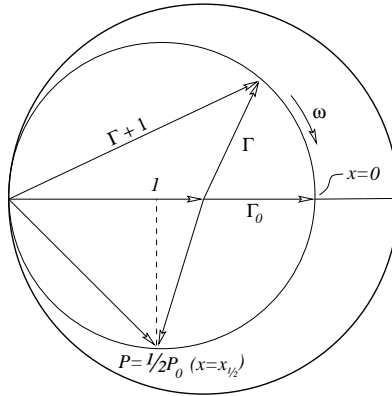
$$= \frac{2Y_0}{Y_0 + G(1 + jQ_0x)} - 1 = \frac{2Y_0}{Y_0 + G + jGQ_0x} - 1,$$

или

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0 + 1}{1 + jQ_n x} - 1,$$

где $\Gamma_0 + 1 = \frac{2Y_0}{Y_0 + G}$, $\frac{Y_0}{G} = \beta$, $Q_n = \frac{Q_0}{1 + \beta}$ — нагруженная добротность.

Представим теперь зависимость коэффициента отражения от частоты в комплексной плоскости коэффициента отражения (см. рис.).



Формулу для коэффициента отражения можно записать следующим образом:

$$\Gamma + 1 = \frac{\Gamma_0 + 1}{1 + jQ_n x}.$$

Левая часть этого равенства пропорциональна напряжению на зажимах резонатора в плоскости S_2 . Зависимость $\Gamma + 1$ от частоты может быть представлена на круговой диаграмме. Если $\beta > 1$, то $\Gamma_0 > 0$, и окружность охватывает начало координат. Если же $\beta < 1$, то $\Gamma_0 < 0$, и окружность не охватывает начало координат. При $\beta = 1$ окружность проходит через начало координат ($\Gamma = 0$).

Найдем мощность, рассеиваемую в резонаторе:

$$P = P_{\text{пад}}(1 - |\Gamma|^2).$$

$$|\Gamma|^2 = \left| \frac{\Gamma_0 + 1 - 1 - jQ_{\text{H}}x}{1 + jQ_{\text{H}}x} \right|^2 = \frac{\Gamma_0^2 + Q_{\text{H}}^2 x^2}{1 + Q_{\text{H}}^2 x^2}.$$

Подставляя это в выражение для P , находим

$$\begin{aligned} P &= P_{\text{пад}} \left(1 - \frac{\Gamma_0^2 + Q_{\text{H}}^2 x^2}{1 + Q_{\text{H}}^2 x^2} \right) = P_{\text{пад}} \frac{1 - \Gamma_0^2}{1 + Q_{\text{H}}^2 x^2} = \\ &= \frac{P_0}{1 + Q_{\text{H}}^2 x^2}. \end{aligned}$$

Здесь $P_0 = P_{\text{пад}}(1 - \Gamma_0^2)$ – мощность, рассеиваемая в резонаторе при резонансе.

Мощность уменьшается вдвое, если

$$Q_{\text{H}}x = \pm 1,$$

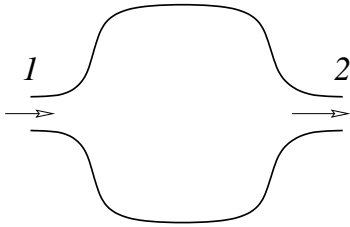
чему соответствует относительная расстройка

$$x_{1/2} = \frac{2\Delta f_{1/2}}{f_0} = \frac{1}{Q_{\text{H}}}.$$

6.8.2. Применение резонаторов

Резонаторы применяются в качестве элементов СВЧ электровакуумных приборов во входных и выходных цепях, а также в качестве фильтров и волномеров.

Когда резонатор применяется в качестве фильтра, то он имеет две связи (см. рис.).



Важным требованием при этом применении является передача энергии из одной линии в другую на резонансной частоте с малыми потерями. Для этого резонатор должен быть согласован со стороны входа, т.е. коэффициент связи со стороны входа должен быть равен

$$\beta'_1 = \frac{Q'_0}{Q_{\text{вн1}}} = 1.$$

Величина Q_0 определяется величинами Q_0 и $Q_{\text{вн2}}$:

$$\frac{1}{Q'_0} = \frac{1}{Q_{\text{вн2}}} + \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} \left(1 + \frac{Q_0}{Q_{\text{вн2}}} \right) = \frac{1 + \beta_2}{Q_0}.$$

Отсюда получаем

$$Q'_0 = \frac{Q_0}{1 + \beta_2}.$$

Таким образом, условие согласования входа может быть записано в виде

$$\frac{Q_0}{Q_{\text{вн1}} (1 + \beta_2)} = 1,$$

или

$$\frac{\beta_1}{1 + \beta_2} = 1.$$

Здесь β_1 и β_2 – коэффициенты связи для соответственно первого и второго входов.

Если $\beta_1 \gg 1$ и $\beta_2 \gg 1$, то условие согласования имеет вид

$$\beta_1 \approx \beta_2.$$

Однако даже при выполнении условия согласования часть мощности рассеивается в стенках самого резонатора. Отношение этой мощности к мощности, передаваемой через второй вход на полезную нагрузку, равно

$$\frac{Q_0}{Q_{\text{вн2}}} = \beta_2.$$

Отсюда коэффициент передачи по мощности резонансного фильтра равен

$$\eta = \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Если выполнены условия $\beta_1 \gg 1$, $\beta_2 \gg 1$ и $\beta_1 \approx \beta_2$, то коэффициент передачи по мощности η близок к 1.

Полоса пропускания фильтра определяется нагруженной добротностью, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_{вн1}} + \frac{1}{Q_{вн2}} + \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} (1 + \beta_1 + \beta_2),$$

откуда

$$Q_n = \frac{Q_0}{1 + \beta_1 + \beta_2}.$$

Резонаторы применяются также в качестве волномеров. При этом они должны быть оборудованы механизмом градуированной перестройки. Чаще всего волномер имеет две связи, причем одна служит для возбуждения, а другая – для индикации, в нее ставится детектор. Обе связи в этом случае выбирают слабыми, чтобы обеспечить максимальную добротность.

7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОМАГНИТНОЙ СРЕДЕ

В СВЧ-технике находят применение ферримагнетики – ферриты, имеющие высокую магнитную проницаемость и в то же время очень малую проводимость. Благодаря этому в них могут распространяться с малым затуханием электромагнитные волны.

7.1. Свойства ферритов

Известно, что магнитные свойства ферритов обусловлены спиновым магнитным моментом электрона. Каждая ячейка кристаллической решетки феррита содержит нескомпенсированный момент электрона. Намагниченность феррита связана с ориентацией магнитного момента электрона.

Кроме магнитного момента электрон имеет также механический момент. Векторы магнитного и механического моментов электрона направлены в противоположные стороны вследствие отрицательного заряда:

$$\vec{m}_e = -\gamma \vec{K},$$

где $\gamma = \frac{e}{m} \approx 1.76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг – гиромагнитное отношение для электрона.

Если электрон находится в магнитном поле \vec{H} , то на него действует вращающий момент

$$\vec{T} = \mu_0 \cdot (\vec{m}_e \times \vec{H}),$$

под действием которого происходит изменение механического момента со скоростью

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{T} = \mu_0 \cdot (\vec{m}_e \times \vec{H}).$$

Если подставить сюда $\vec{m}_e = -\gamma \vec{K}$, то получим (после перестановки сомножителей)

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \mu_0 \gamma \vec{H} \times \vec{K}.$$

Данное соотношение показывает, что вектор \vec{K} вращается около направления \vec{H} с угловой частотой (частота однородной прецессии)

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma |\vec{H}|,$$

причем вращение образует с магнитным полем \vec{H} правый винт.

Если теперь умножить левую и правую части уравнения на $-\gamma n$, где n – число электронов – магнитных диполей в единице объема, то получим уравнение движения вектора намагниченности \vec{M} ($\vec{M} = n \vec{m}_e$)

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mu_0 \gamma (\vec{H} \times \vec{M}).$$

Таким образом, в присутствии постоянного магнитного поля вектор намагниченности прецессирует вокруг магнитного поля с частотой ω_0 . Если бы не было затухания, то прецессия продолжалась неограниченно долго. Однако благодаря взаимодействию прецессирующего спина с кристаллической решеткой и другими спинами имеет место затухание, и вращение происходит по свертывающейся спирали.

Такую модель ферромагнетика можно рассматривать как колебательную систему с собственной частотой ω_0 . Действительно, если \vec{H} направить вдоль оси z , из уравнения для \vec{K} легко получить

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= -\omega_0 K_y, \\ \frac{dK_y}{dt} &= \omega_0 K_x, \end{aligned}$$

откуда, исключая поочередно K_x и K_y , получим

$$\begin{aligned}\frac{d^2 K_x}{dt^2} + \omega_0^2 K_x &= 0, \\ \frac{d^2 K_y}{dt^2} + \omega_0^2 K_y &= 0,\end{aligned}$$

т.е. уравнения колебаний без затухания. Аналогичные уравнения имеют место для составляющих \vec{M} .

Рассмотрим случай, когда феррит намагничен однородно, т.е. магнитные моменты всех электронов параллельны. При этом можно не учитывать обменные силы между спинами электронов. Реально намагниченность не бывает однородной, но если длина неоднородности много больше расстояния между атомами, то обменные силы можно не учитывать и при неоднородном намагничении.

В указанных условиях вектор намагниченности \vec{M}_0 через некоторое время будет ориентирован вдоль приложенного постоянного поля \vec{H}_0 , что соответствует намагничению до насыщения.

Если теперь воздействовать на феррит слабым переменным магнитным полем \vec{h} , то оно вызовет малые отклонения моментов от их положения равновесия, что приведет к появлению соответствующей переменной намагниченности \vec{m} . Связь между \vec{m} и \vec{h} определит магнитную восприимчивость феррита на некоторой частоте ω .

Пусть ось z совпадает с направлением \vec{H}_0 . Тогда результирующее магнитное поле будет равно

$$\vec{H} = \vec{h} + \vec{H}_0, \quad \vec{M} = \vec{m} + \vec{M}_0,$$

причем \vec{H}_0 и \vec{M}_0 имеют только z -е составляющие. Так как все величины изменяются синусоидально, то производная по времени означает умножение на $j\omega$. Тогда, отбрасывая члены высшего порядка малости, из уравнения для \vec{M} получаем

$$\begin{aligned}j\omega m_x &= -\mu_0\gamma(m_y H_0 - h_y M_0), \\ j\omega m_y &= \mu_0\gamma(m_x H_0 - h_x M_0), \\ j\omega m_z &= 0.\end{aligned}$$

Данную систему уравнений можно решить относительно m_x и m_y :

$$\begin{aligned}
m_x &= -\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} h_x - j \frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} h_y, \\
m_y &= j \frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} h_x - \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\omega^2 - \mu_0^2 \gamma^2 H_0^2} h_y, \\
m_z &= 0.
\end{aligned}$$

Если обозначить

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0, \quad \omega_M = \mu_0 \gamma M_0,$$

то эти формулы можно записать в виде

$$\begin{aligned}
m_x &= -\frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_x - j \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_y, \\
m_y &= j \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_x - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} h_y, \\
m_z &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда могут быть найдены составляющие вектора магнитной индукции, учитывая, что

$$\vec{b} = \mu_0(\vec{h} + \vec{m}).$$

Обозначив

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$$

и

$$k = \mu_0 \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

для составляющих магнитной индукции получим

$$\begin{aligned}
b_x &= \mu h_x - jk h_y, \\
b_y &= jk h_x + \mu h_y, \\
b_z &= \mu_0 h_z.
\end{aligned}$$

В последней строке вместо μ_0 обычно пишут μ_z , которое может быть отлично от μ_0 .

Связь между \vec{b} и \vec{h} может быть записана через тензор магнитной проницаемости $\hat{\mu}$:

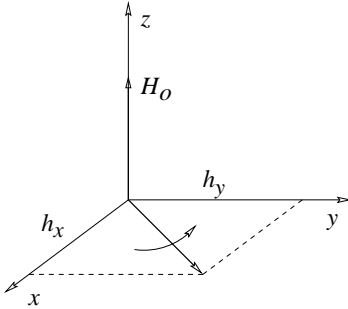
$$\vec{b} = \hat{\mu} \vec{h},$$

причем тензор магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ равен

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}.$$

Составляющие тензора магнитной проницаемости зависят от частоты резонансным образом. Резонанс имеет место при $\omega = \omega_0 = \mu_0 \gamma H_0$.

Однако при определенных условиях магнитную проницаемость можно представить в виде скаляра. Это можно сделать, если поперечное высокочастотное поле является вращающимся. Можно различать правое вращение, образующее с \vec{H} правый винт, и левое, образующее с \vec{H} левый винт.



Для правого вращения, как нетрудно видеть (см. рис.),

$$h_y = -jh_x \quad (\text{или } h_x = jh_y).$$

Подставляя это в выражение для b_x и b_y , получим

$$b_x = \mu h_x - jk h_y = \mu h_x - k h_x = (\mu - k) h_x,$$

$$b_y = jk h_x + \mu h_y = -k h_y + \mu h_y = (\mu - k) h_y.$$

Таким образом, в данном случае магнитная проницаемость является диагональным тензором

$$\hat{\mu}_+ = \begin{vmatrix} \mu - k & 0 & 0 \\ 0 & \mu - k & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix},$$

а если высокочастотное магнитное поле не имеет z -й составляющей, то $\hat{\mu}_+$ становится скаляром:

$$\mu_+ = \mu - k = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} - \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M}{\omega - \omega_0} \right).$$

В случае левого вращения

$$h_y = j h_x \quad (\text{или } h_x = -j h_y).$$

Подставляя это в выражение для b_x и b_y , получим

$$b_x = \mu h_x - j k h_y = \mu h_x + k h_x = (\mu + k) h_x,$$

$$b_y = j k h_x + \mu h_y = k h_y + \mu h_y = (\mu + k) h_y,$$

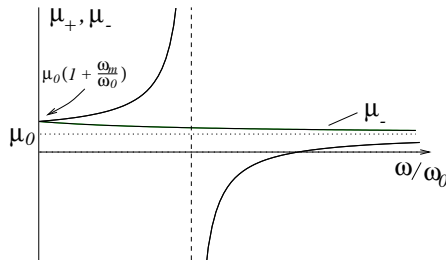
откуда

$$\hat{\mu}_- = \left\| \begin{array}{ccc} \mu + k & 0 & 0 \\ 0 & \mu + k & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{array} \right\|$$

и

$$\mu_- = \mu + k = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_0 \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_M}{\omega + \omega_0} \right).$$

В зависимости от частоты μ_+ и μ_- можно представить в виде графиков, показанных на рис.



Как видно, μ_+ имеет разрыв, когда частота вращения поля совпадает с частотой свободной прецессии. В действительности разрыв ограничен

потерями и нелинейностью. Благодаря потерям магнитная проницаемость приобретает мнимую составляющую.

Потери в феррите могут быть описаны дополнительным членом в уравнении для намагниченности

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mu_0\gamma(\vec{H} \times \vec{M}) + \vec{R}.$$

Существует несколько форм диссипативного члена. Простейшая была предложена Ландау в 1935 г:

$$\vec{R} = -\frac{\mu_0\gamma}{|\vec{M}|}\alpha(\vec{M} \times (\vec{H} \times \vec{M})).$$

Такая форма записи учитывает потери чисто феноменологически. При этом вектор намагниченности приближается по направлению к вектору намагничивающего поля (к равновесию) со скоростью, пропорциональной скорости вращения и углу отклонения от равновесия. Величина α – феноменологическая константа, описывающая затухание. Величина вектора намагниченности при этом предполагается неизменной.

Если решить уравнение с учетом затухания, то с точностью до малых порядка выше α^2 получим

$$\mu_+ = \mu'_+ - j\mu''_+,$$

где

$$\mu'_+ = \mu_0\left(1 - \frac{\omega_M(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega + \omega_0)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\alpha^2}\right),$$

$$\mu''_+ = \mu_0\frac{\alpha\omega\omega_M(\omega + \omega_0)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\alpha^2}.$$

Для левого вращения

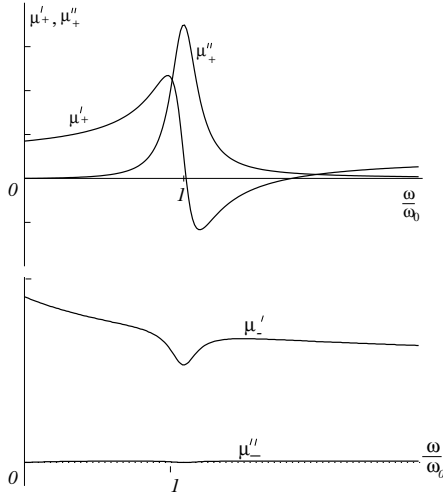
$$\mu_- = \mu'_- - j\mu''_-,$$

где

$$\mu'_- = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega - \omega_0)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\alpha^2} \right),$$

$$\mu''_- = \mu_0 \frac{\alpha\omega\omega_M(\omega - \omega_0)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2\alpha^2}.$$

Графически это представлено на рис.



Таким образом, только μ_+ носит резонансный характер, а μ_- – нерезонансный.

7.2. Распространение плоских волн в намагниченном феррите

7.2.1. Продольно намагниченный феррит

Будем в дальнейшем предполагать, что феррит намагничен вдоль оси z . Рассмотрим распространение плоской волны в направлении оси z .

Поле волны примет вид

$$\vec{e} = \vec{e}_0 \cdot e^{-\gamma z}, \quad \vec{h} = \vec{h}_0 \cdot e^{-\gamma z}, \quad \vec{b} = \vec{b}_0 \cdot e^{-\gamma z},$$

причем для плоской волны в неограниченном пространстве имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma.$$

Распространение описывается уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{e} &= -j\omega \vec{b}, \\ \operatorname{rot} \vec{h} &= j\omega \varepsilon \vec{e}. \end{aligned}$$

Исключая \vec{e} , получим уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{h} - \omega^2 \varepsilon \cdot \vec{b} = 0.$$

Запишем это уравнение для составляющих в декартовой системе координат:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{h} - \Delta \vec{h} - \omega^2 \varepsilon \cdot \vec{b} = 0.$$

Далее,

$$\operatorname{div} \vec{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}.$$

Но в плоской волне

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma,$$

поэтому

$$\operatorname{div} \vec{h} = -\gamma h_z.$$

Так как grad имеет только z -ю составляющую, то уравнение может быть расписано по декартовым составляющим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma^2 h_x + \omega^2 \varepsilon b_x &= 0, \\ \gamma^2 h_y + \omega^2 \varepsilon b_y &= 0, \\ -\gamma^2 h_z + \gamma^2 h_z + \omega^2 \varepsilon b_z &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $b_z = \mu_z h_z = 0$, откуда $h_z = 0$, т.е. все продольные составляющие поля равны нулю. Следовательно, в случае распространения в продольно намагниченном феррите поле является поперечным.

Если в первые два уравнения подставить выражения для b_x и b_y через h_x и h_y :

$$\begin{aligned} b_x &= m h_x - j k h_y, \\ b_y &= j k h_x + \mu h_y, \end{aligned}$$

то получим уравнения

$$\begin{aligned} (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) h_x - j \omega^2 \varepsilon k h_y &= 0, \\ j \omega^2 \varepsilon k h_x + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) h_y &= 0. \end{aligned}$$

Данная однородная система линейных уравнений относительно h_x , h_y имеет нетривиальные решения при условии равенства нулю определителя

$$(\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon)^2 - (\omega^2 \varepsilon k)^2 = 0,$$

откуда

$$\gamma^2 + \omega^2 \mu \varepsilon = \pm \omega^2 \varepsilon k,$$

или

$$\gamma^2 = -\omega^2 \varepsilon (\mu \mp k),$$

т.е.

$$\gamma = \pm j \omega \sqrt{\varepsilon (\mu \mp k)} = \pm j \beta_{\pm},$$

где

$$\beta_+ = \omega \sqrt{(\mu - k) \varepsilon}, \quad \beta_- = \omega \sqrt{(\mu + k) \varepsilon}.$$

Для β_+ из первого уравнения получаем соотношение

$$\omega^2 \varepsilon k h_x - j \omega^2 \varepsilon k h_y = 0,$$

откуда $h_x = j h_y$. Такое соотношение соответствует волне с круговой поляризацией, образующей правый винт с H_z . При этом

$$\mu_+ = \mu - k.$$

Для $\beta_- = \omega \cdot \sqrt{(\mu + k)\varepsilon}$ имеем

$$h_x = -j h_y,$$

т.е. это – левополяризованная волна.

Таким образом, решениями уравнений Максвелла являются плоские волны с круговой поляризацией, причем скорости распространения (и затухания) волн с противоположным направлением вращения различны.

Для исследования распространения линейно поляризованной волны ее следует разложить на две с круговой поляризацией с различными постоянными распространения. В связи с этим накапливается разность фаз

$$\Delta\varphi = -l(\beta_+ - \beta_-).$$

За счет этого происходит поворот плоскости поляризации на угол

$$\theta = \frac{\Delta\varphi}{2} = -\frac{l}{2}(\beta_+ - \beta_-).$$

Если $\omega_0 < \omega$, $\omega_M < \omega$, что соответствует слабому намагничению, то

$$\begin{aligned} \mu_+ &\approx \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M}{\omega}\right) ; & \sqrt{\mu_+} &\approx \sqrt{\mu_0} \left(1 - \frac{\omega_M}{2\omega}\right) ; \\ \mu_- &\approx \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_M}{\omega}\right) ; & \sqrt{\mu_-} &\approx \sqrt{\mu_0} \left(1 + \frac{\omega_M}{2\omega}\right) . \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \theta &\approx -\frac{l}{2} \left[\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \left(1 - \frac{\omega_M}{2\omega}\right) - \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \left(1 + \frac{\omega_M}{2\omega}\right) \right] = \\ &= \frac{l}{2} \omega_M \sqrt{\mu_0 \varepsilon}, \end{aligned}$$

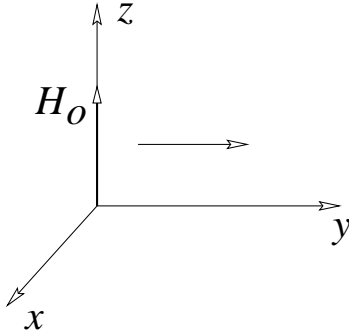
т.е. не зависит от частоты. Отметим, что здесь ε – электрическая проницаемость ферритовой среды.

Поворот плоскости поляризации при слабом намагничении составляет правый винт с направлением намагничивающего поля независимо от направления распространения. Если изменить направление магнитного поля, то поворот плоскости поляризации изменит знак, но по-прежнему составляет с намагничивающим полем правый винт. Это свойство иногда используется для создания невзаимных элементов СВЧ-техники.

Если учесть затухание, то по мере распространения линейно поляризованная волна превращается в поляризованную по эллипсу, так как правополяризованная волна затухает быстрее. В конце концов линейно поляризованная волна может превратиться в поляризованную по кругу. Особенно быстро это происходит вблизи резонанса.

В магнитном поле, большем резонансного значения, вращение плоскости поляризации происходит в обратном направлении.

7.2.2. Поперечно намагниченный феррит



Рассмотрим теперь распространение в направлении оси y , т.е. перпендикулярно намагничивающему полю (см. рис.). В этом случае

$$\vec{e} = \vec{e}_0 \cdot e^{-\gamma y}, \quad \vec{h} = \vec{h}_0 \cdot e^{-\gamma y}, \quad \vec{b} = \vec{b}_0 \cdot e^{-\gamma y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\gamma.$$

Уравнение электромагнитного поля имеет прежний вид

$$\text{rot rot } \vec{h} - \omega^2 \varepsilon \cdot \vec{b} = 0$$

или

$$\Delta \vec{h} + \omega^2 \varepsilon \cdot \vec{b} - \text{grad div } \vec{h} = 0.$$

Отметим, что $\text{grad div } \vec{h}$ в этом случае имеет y -ю составляющую, равную $\gamma^2 h_y$. Уравнение записывается в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned} \gamma^2 h_x + \omega^2 \varepsilon b_x &= 0, \\ \gamma^2 h_y + \omega^2 \varepsilon b_y - \gamma^2 h_y &= 0, \\ \gamma^2 h_z + \omega^2 \varepsilon b_z &= 0. \end{aligned}$$

Подставим теперь составляющие \vec{b} . Получим

$$\begin{aligned} h_x (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu) - j \omega^2 \varepsilon k h_y &= 0, \\ j k h_x + \mu h_y &= 0, \\ h_z (\gamma + \omega^2 \varepsilon \mu_z) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя h_y из второго уравнения в первое, получим

$$\begin{aligned} h_x \left(\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu - \frac{\omega^2 \varepsilon k^2}{\mu} \right) &= 0, \\ h_z (\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu_z) &= 0. \end{aligned}$$

Если положить $h_x \neq 0$, то из первого уравнения следует

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu - \frac{\omega^2 \varepsilon k^2}{\mu} = 0,$$

или

$$\gamma_1 = \pm j \omega \sqrt{\varepsilon \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}}.$$

Из второго уравнения при этом следует, что $h_z = 0$, т.е. волна поляризована линейно в плоскости \vec{H}_0 (электрический вектор). Заметим, что в этом случае эффективная магнитная проницаемость равна

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}.$$

В другом случае $h_z \neq 0$, $h_x = h_y = 0$. Постоянная распространения в этом случае определяется уравнением

$$\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu_z = 0,$$

откуда

$$\gamma_2 = \pm j\omega \sqrt{\mu_z \varepsilon}.$$

Данная волна поляризована перпендикулярно \vec{H}_0 .

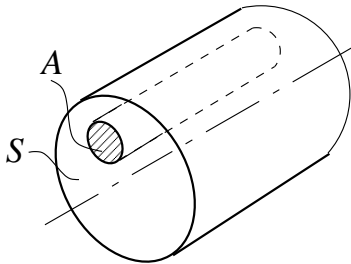
Итак, в случае поперечного намагничивания феррита имеет место эффект двойного лучепреломления. Одна – необыкновенная – волна не является чисто поперечной, так как кроме h_x имеется продольная составляющая напряженности магнитного поля h_y , сдвинутая по фазе на 90° относительно h_x . Для необыкновенной волны

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu} = \frac{(\mu - k)(\mu + k)}{\mu} = \frac{\mu_+ \mu_-}{\mu}.$$

Другая – обыкновенная – волна поперечна и ничем не отличается от плоских волн в других средах. Для этой волны имеем

$$\mu_{\parallel} = \mu_z.$$

7.3. Распространение волн в волноводе, частично заполненном ферритом



Предположим, что некоторая часть сечения волновода заполнена намагниченным ферритом (см. рис.). Вследствие этого заполнения постоянная распространения и собственные векторные функции волновода несколько изменяются. Пусть \vec{E}_m , \vec{H}_m , γ_0 – векторные функции и постоянная распространения невозмущенного волновода, \vec{E} , \vec{H} , γ – то же для возмущенного волновода. Если пренебречь потерями, то $\gamma_0 = j\beta_0$, $\gamma = j\beta$.

Подставляя это в уравнения Максвелла и учитывая векторное тождество

$$\operatorname{rot}(\Phi \cdot \vec{F}) = \Phi \cdot \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} \Phi \times \vec{F},$$

после сокращения экспонент $e^{j\beta z}$ и $e^{-j\beta z}$ получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}_m^* + j\beta_0 \cdot \vec{z}_0 \times \vec{E}_m^* &= j\omega\mu_0 \vec{H}_m^*, \\ \operatorname{rot} \vec{H}_m^* + j\beta_0 \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H}_m^* &= -j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_m^*, \\ \operatorname{rot} \vec{E} - j\beta \cdot \vec{z}_0 \times \vec{E} &= -j\omega\mu \cdot \vec{H}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} - j\beta \cdot \vec{z}_0 \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

При этом

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 & - \text{вне сечения феррита } A, \\ \hat{\mu} & - \text{на } A; \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0 & - \text{вне } A, \\ \hat{\varepsilon} & - \text{на } A. \end{cases}$$

Для получения формулы, удобной для использования в теории возмущений, составим выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}_m^* \times \vec{H}) + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}_m^*) &= \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}_m^* - \vec{E}_m^* \cdot \operatorname{rot} \vec{H} + \\ &+ \vec{H}_m^* \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}_m^*. \end{aligned}$$

Подставляя сюда rot из написанных выше уравнений, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}_m^* \times \vec{H}) + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}_m^*) &= \vec{H}(j\omega\mu_0 \vec{H}_m^* - j\beta_0 \vec{z}_0 \times \vec{E}_m^*) - \\ &- \vec{E}_m^*(j\omega\varepsilon \vec{E} + j\beta \vec{z}_0 \times \vec{H}) + \vec{H}_m^*(-j\omega\mu \vec{H} + j\beta \vec{z}_0 \times \vec{E}) - \\ - \vec{E}(-j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_m^* - j\beta_0 \vec{z}_0 \times \vec{H}_m^*) &= -j\omega \vec{H}_m^*(\mu - \mu_0) \vec{H} - j\omega \vec{E}_m^*(\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} - \\ &- j(\beta - \beta_0) \vec{E}_m^*(\vec{z}_0 \times \vec{H}) - j(\beta - \beta_0) \vec{E}(\vec{z}_0 \times \vec{H}_m^*). \end{aligned}$$

Данное равенство проинтегрируем по сечению волновода. При этом интеграл от дивергенций преобразуется в интеграл по периметру сечения и обращается в нуль вследствие граничных условий. В результате получаем равенство

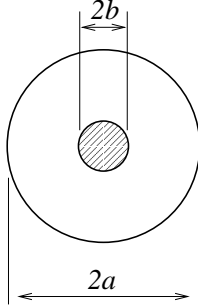
$$0 = -\omega \int_S [\vec{H}_m^* \cdot (\mu - \mu_0) \cdot \vec{H} + \vec{E}_m^* \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot \vec{E}] dS + \\ + (\beta - \beta_0) \int_S [\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*] \cdot \vec{z}_0 dS,$$

откуда, с учетом того, что $\mu - \mu_0 \neq 0$ и $\varepsilon - \varepsilon_0 \neq 0$ лишь на сечении феррита A , находим

$$\beta = \beta_0 + \omega \frac{\int_A [\vec{H}_m^* \cdot (\hat{\mu} - \mu_0) \cdot \vec{H} + \vec{E}_m^* \cdot (\hat{\varepsilon} - \varepsilon_0) \cdot \vec{E}] dS}{\int_S [\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*] \cdot \vec{z}_0 dS}.$$

Полученная формула является точной, но требует знания возмущенных функций \vec{E} и \vec{H} . Их можно определить приближенно, поэтому формула пригодна в качестве первого приближения для слабозаполненного волновода.

Пользуясь этой формулой, рассмотрим важный частный случай: распространение моды типа H_{11} в круглом волноводе, на оси которого расположен тонкий круглый ферритовый стержень, намагниченный продольно. Обозначения приведены на рис.



Отметим, что в знаменателе полученной формулы в первом приближении можно пренебречь отличием возмущенного поля от невозмущенного, т.е. положить $\vec{H} \approx \vec{H}_m$, $\vec{E} \approx \vec{E}_m$, так как интеграл в знаменателе берется по всему сечению волновода, так что поправка будет малой. Тогда знаменатель преобразуется следующим образом:

$$\int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS \approx \int_S (\vec{E}_m^* \times \vec{H}_m + \vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS = \\ = 2\text{Re} \int_S (\vec{E}_m \times \vec{H}_m^*) \cdot \vec{z}_0 dS = \frac{2}{Z_m} \cdot \int_S |E_m^{\text{нон}}|^2 dS,$$

где

$$Z_m = \frac{j\omega\mu_0}{\gamma_0} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_0} -$$

вещественная величина.

Для нахождения возмущенного поля в феррите при малом по сравнению с длиной волны поперечном размере феррита можно воспользоваться квазистатическим приближением. При внесении магнетика во внешнее однородное магнитное поле в магнетике устанавливается поле, определяемое размагничивающим фактором:

$$\vec{h}^i = \vec{h}^e - \hat{N} \cdot \vec{m}.$$

Здесь \vec{h}^i – внутреннее поле в магнетике, \vec{h}^e – поле, которое было до внесения магнетика, \vec{m} – намагниченность, \hat{N} – размагничивающий фактор – симметричный тензор.

В частности, для цилиндра в поперечном поле тензор размагничивающего фактора диагонален, причем $N_{xx} = N_{yy} = \frac{1}{2}$, $N_{zz} = 0$. Намагниченность связана с внутренним полем в магнетике через восприимчивость:

$$\vec{m} = \hat{\chi} \cdot \vec{h}^i,$$

причем восприимчивость в данном случае также имеет тензорный характер:

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\mu_0}.$$

Подставляя эти соотношения в исходную формулу, получаем

$$\vec{h}^i = \vec{h}^e - \hat{N} \cdot \hat{\chi} \vec{h}^i.$$

Решая это соотношение относительно \vec{h}^i , получим

$$\vec{h}^i = (1 + \hat{N} \cdot \hat{\chi})^{-1} \cdot \vec{h}^e.$$

В нашем случае в качестве внешнего поля мы должны принять невозмущенное поле \vec{H}_m , а в качестве внутреннего – возмущенное поле \vec{H} , т.е. внутри феррита поле равно

$$\vec{H} = (1 + \hat{N} \cdot \hat{\chi})^{-1} \cdot \vec{H}_m.$$

Для упрощения будем искать постоянные распространения для волн с круговой поляризацией (правой и левой), так как для них тензоры проницаемости диагональны:

$$\hat{\mu}_{\pm} = \begin{vmatrix} \mu_{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad \hat{\chi}_{\pm} = \begin{vmatrix} \chi_{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_z \end{vmatrix},$$

причем

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_0}{\mu_0}.$$

Так как оба тензора диагональны, то

$$\hat{N} \cdot \hat{\chi}_{\pm} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\chi_{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\chi_{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда имеем соотношения

$$H_x = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\chi_{\pm}} H_{mx}, \quad H_y = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\chi_{\pm}} H_{my}, \quad H_z = H_{mz}.$$

Так как

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\chi_{\pm}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\mu_{\pm} - \mu_0}{\mu_0}} = \frac{2\mu_0}{\mu_{\pm} + \mu_0},$$

то

$$H_x = \frac{2\mu_0}{\mu_{\pm} + \mu_0} \cdot H_{mx}, \quad H_y = \frac{2\mu_0}{\mu_{\pm} + \mu_0} \cdot H_{my}, \quad H_z = H_{mz}.$$

Аналогично для электрического поля получим

$$E_x = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_{mx}, \quad E_y = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_{my}.$$

Для невозмущенной моды H_{11} в круглом волноводе поперечные составляющие магнитного и электрического поля имеют вид

$$\begin{aligned} H_r &= -j\beta_0 g'_{11} J'_1(g'_{11}r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ H_\varphi &= \pm \frac{j\beta_0}{r} J_1(g'_{11}r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ E_r &= \pm \frac{j\omega\mu_0}{r} J_1(g'_{11}r) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ E_\varphi &= j\omega\mu_0 \cdot g'_{11} J'_1(g'_{11}r) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Нас интересуют поля вблизи центра, где они практически однородны. Эти поля могут быть найдены путем разложения $J_1(g'_{11}r)$ и $J'_1(g'_{11}r)$ по степеням r с оставлением в выражениях для компонент поля не зависящих от r членов:

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{2}j\beta_0 g'_{11} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}, \\ H_\varphi &= \pm \frac{1}{2}j\beta_0 g'_{11} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ E_r &= \pm \frac{1}{2}j\omega\mu_0 g'_{11} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{2}j\omega\mu_0 g'_{11} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned}$$

Так как мы хотим иметь дело с вращающимися полями, то следует скомбинировать записанные выше поля. Тогда получаем

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{1}{2}j\beta_0 g'_{11} e^{\pm j\varphi}, \\ H_\varphi &= \pm \frac{1}{2}\beta_0 g'_{11} e^{\pm j\varphi}, \\ E_r &= \pm \frac{1}{2}j\omega\mu_0 g'_{11} e^{\pm j\varphi}, \\ E_\varphi &= -\frac{1}{2}\omega\mu_0 g'_{11} e^{\pm j\varphi}. \end{aligned}$$

Переход к декартовым составляющим может быть произведен по формулам

$$\begin{aligned} H_x &= H_r \cos \varphi - H_\varphi \sin \varphi, \\ H_y &= H_r \sin \varphi + H_\varphi \cos \varphi, \\ E_x &= E_r \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi, \\ E_y &= E_r \sin \varphi + E_\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Это дает

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{1}{2}j\beta_0 g'_{11}, \\ H_y &= \pm \frac{1}{2}\beta_0 g'_{11}, \\ E_x &= \pm \frac{1}{2}j\omega\mu_0 g'_{11}, \\ E_y &= -\frac{1}{2}\omega\mu_0 g'_{11}. \end{aligned}$$

Мы нашли, таким образом, приближенные выражения для невозмущенного поля в центральной области круглого волновода. Заметим, что знаки “+” и “-” соответствуют левому и правому вращениям.

Отсюда с помощью полученных выше формул находим поле в феррите:

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{j\mu_0\beta_0 g'_{11}}{\mu_\pm + \mu_0}, \\ H_y &= \mp \frac{\mu_0\beta_0 g'_{11}}{\mu_\pm + \mu_0}, \\ E_x &= \mp \frac{j\varepsilon_0\omega\mu_0 g'_{11}}{\varepsilon + \varepsilon_0}, \\ E_y &= -\frac{\varepsilon_0\omega\mu_0 g'_{11}}{\varepsilon + \varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Теперь мы имеем возможность вычислить интегралы, входящие в формулу для нового значения постоянной распространения β . Учтывая, что $g'_{11} = 1.84/a$ и подставляя интегралы, получим

$$\beta_{\pm} \approx \beta_0 + 2.1 \cdot \beta_0 \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\mu_{\pm} - \mu_0}{\mu_{\pm} + \mu_0} + \frac{k_0^2}{\beta_0^2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \right), \quad k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0.$$

Таким образом, фазовые скорости для правого и левого вращения различны, поэтому плоскость поляризации линейно поляризованной волны вращается при распространении. Угол поворота может быть вычислен на основании предыдущей формулы:

$$\theta = -\frac{l(\beta_+ - \beta_-)}{2} = 4.2 \cdot \beta_0 l \frac{b^2}{a^2} \frac{k \mu_0}{(\mu_+ + \mu_0)(\mu_- + \mu_0)}.$$

Заметим, что

$$\mu_+ + \mu_0 = \mu_0 \left(2 - \frac{\omega_M}{\omega - \omega_0} \right), \quad \mu_- + \mu_0 = \mu_0 \left(2 + \frac{\omega_M}{\omega + \omega_0} \right), \quad k = \frac{\mu_0 \omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

При слабо намагниченном феррите ($\omega \gg \omega_0$)

$$k \mu_0 \approx \mu_0^2 \frac{\omega_M}{\omega}; \quad (\mu_+ + \mu_0)(\mu_- + \mu_0) \approx \mu_0^2 \left(4 - \frac{\omega_M^2}{\omega^2} \right).$$

Подставляя это в выражение для θ , для слабо намагниченного феррита получим

$$\theta \approx 4.2 \cdot \beta_0 l \frac{b^2}{a^2} \frac{\frac{\omega_M}{\omega}}{\mu_0^2 \left(4 - \frac{\omega_M^2}{\omega^2} \right)} \approx \beta_0 l \frac{b^2}{a^2} \frac{\omega_M}{\omega}.$$

Так как $\beta_0 = \frac{\omega}{v_\Phi}$, то вдали от критической частоты θ слабо зависит от частоты, но почти линейно от намагниченности (ω_M).

7.4. Вентили и циркуляторы

Введение намагниченного феррита в волновод позволяет создать устройства, не удовлетворяющие принципу взаимности. Простейшие из них пропускают волны в одном направлении и поглощают – в другом. Такое устройство называют вентилем (или изолятором). Более сложные передают сигнал из одного входа в другой по кругу (циркулятор). Здесь мы рассмотрим некоторые виды этих устройств.

Для того чтобы феррит проявил свои не взаимные свойства, его следует помещать в такой области волновода, где высокочастотное магнитное поле имеет круговую поляризацию.

В прямоугольном волноводе магнитное поле основной моды H_{10} имеет две составляющие:

$$\begin{aligned} H_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \cos \frac{\pi x}{a}, \\ H_x &= \frac{j\pi\beta}{a} \cdot \sin \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Эти составляющие ориентированы под углом 90° друг к другу и сдвинуты на 90° по фазе. Это значит, что магнитное поле поляризовано по эллипсу. Поляризация становится круговой в точке, где амплитуды ортогональных составляющих равны

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{a} = \pm \frac{\pi\beta}{a} \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{a} = \pm \frac{\pi}{a\beta} = \pm \frac{\Lambda}{2a},$$

где Λ — длина волны в волноводе.

Координата x , для которой магнитное поле поляризовано по кругу, равна

$$x = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{a\beta} = \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{2a},$$

или второе значение x

$$x = \frac{a}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\pi}{a\beta} \right) = \frac{a}{\pi} \left(\pi - \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{2a} \right).$$

Здесь значение arctg берется в пределах от 0 до $\pi/2$.

В этом месте волновода помещается ферритовая пластина, намагниченная поперечно относительно волновода. Правое или левое вращение магнитного поля в феррите зависит от направления распространения

волны, поэтому величина магнитной проницаемости μ_{\pm} зависит от направления распространения.

Если постоянное магнитное поле выбрано так, чтобы

$$\omega_0 = \mu_0 \gamma H_0 \approx \omega,$$

то потери для волны с правым вращением резко возрастают, в то время как для волны с левым вращением потери остаются малыми. Потери в прямом направлении обычно составляют 0.5–0.7 дБ, а в обратном достигают 25–30 дБ. Для расширения полосы намагничивающее поле делают неоднородным в продольном направлении. Кроме того, эффект невзаимности усиливается, если рядом с ферритом поместить диэлектрическую пластину с большой величиной ϵ . Такой вентиль называют резонансным.

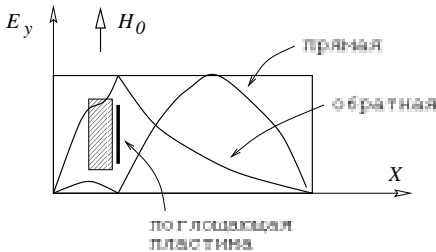
В других вентилях используют эффект смещения электрического поля в устройстве с ферритом. Для этого подмагничивающее поле должно быть значительно меньше резонансного значения. Подмагничивающее поле определяется условием

$$\mu_+ = \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_M}{\omega - \omega_0} \right) \approx 0,$$

откуда

$$\omega_0 = \omega - \omega_M,$$

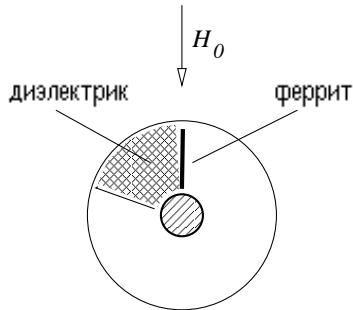
т.е. значительно меньше, чем $\omega_0 = \omega$ для резонансного вентиля.



Для прямой волны μ_+ равно нулю, поэтому магнитное и электрическое поля вблизи феррита очень малы. Для обратной волны, наоборот, поле концентрируется вблизи феррита (см. рис.).

Если на феррит наклеить диэлектрическую пластину, покрытую полупроводящим покрытием, то затухание обратной волны будет существенно больше затухания прямой волны. Прямое затухание в таких вентилях составляет 0.5–1 дБ, обратное – 20–30 дБ. Вес таких вентиляей мал благодаря малой величине необходимого поля.

Коаксиальные вентили могут быть созданы, если добиться в них получения вращающегося магнитного поля. Это достигается путем введения в коаксиальную линию диэлектрика, заполняющего некоторый сектор сечения. Тогда в линии появляется продольная составляющая магнитного поля, которая вместе с поперечной составляющей образует вращающееся магнитное поле. Ферритовую пластину помещают на боковой поверхности диэлектрика в поперечное подмагничивающее поле.

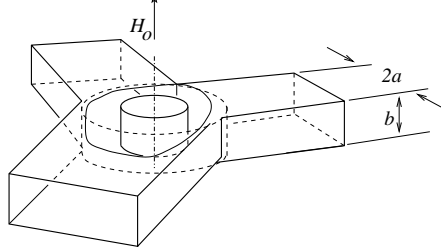


7.4.3. Циркуляторы

Идеальный циркулятор определяется как невзаимное устройство без потерь с числом входов больше двух, в котором сигнал, поданный на любой из входов, передается полностью на один из соседних (на другие входы при этом не поступает ничего).

Существуют различные типы циркуляторов. Чаще всего встречаются трех- и четырехплечные циркуляторы. Трехплечные построены на основе ферритового резонатора, четырехплечные волноводные – на основе невзаимного фазовращателя.

Рассмотрим трехплечный волноводный циркулятор на основе резонатора с намагниченным ферритом. Его устройство представлено на рис. Основой циркулятора является круглый резонатор типа E_{110} , у которого электрическое поле имеет лишь одну составляющую E_z . На оси электрическое поле равно нулю, но линейно возрастает при удалении от оси. Магнитное поле имеет две составляющие: H_r и H_φ . В центральной области магнитное поле близко к однородному. Центральная область резонатора заполнена ферритом, намагниченным в направлении оси резонатора.

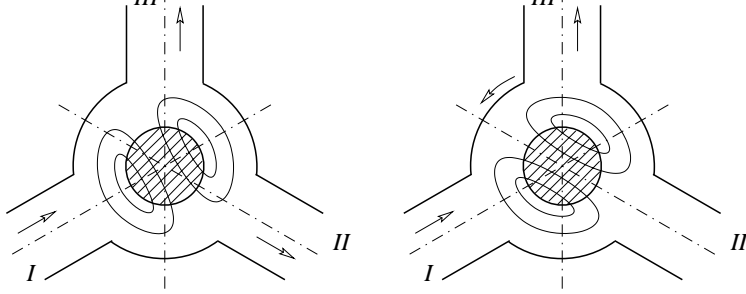


К резонатору присоединены три прямоугольных волновода. На рис. (см. след. стр.) показана структура электромагнитного поля рабочей (дипольной) моды E_{110} резонатора. В изотропном приближении эта мода дважды вырождена. В частности, линейно поляризованная мода может быть разложена на две моды с круговой поляризацией, вращающиеся в противоположном направлении. Для этих мод магнитное поле в центре резонатора имеет круговую поляризацию, которая преобразуется в эллиптическую с ростом радиуса. На границе резонатора поляризация линейна, так как направление магнитного поля фиксировано граничными условиями.

В резонаторе, частично заполненном намагниченным ферритом, собственные частоты циркулярно поляризованных мод E_{110} становятся различными благодаря различию магнитной проницаемости для правого и левого вращения.

Принцип действия циркулятора с таким резонатором может быть объяснен путем рассмотрения вынужденных колебаний в этом резонаторе. Предположим, что волноводы, связанные с резонатором, присоединены с угловым расстоянием 120° между ними, и возбуждающее поле приложено к одному из них.

В изотропном приближении линейно поляризованное поле моды E_{110} будет возбуждено в резонаторе так, что возбуждающий волновод находится в максимуме электрического поля. Структура этого поля показана на рис. Это поле возбуждает линии *II* и *III* аналогичным образом.



Когда постоянное магнитное поле включено, плоскость поляризации возбужденной моды E_{110} поворачивается. На другом рис. показана структура поля этой моды при повороте плоскости поляризации на 30° . В этом случае волновод II оказывается в узле электрического поля и не возбуждается. Если линия согласована, то вся мощность из волновода I будет передана в волновод II . Устройство будет работать как циркулятор.

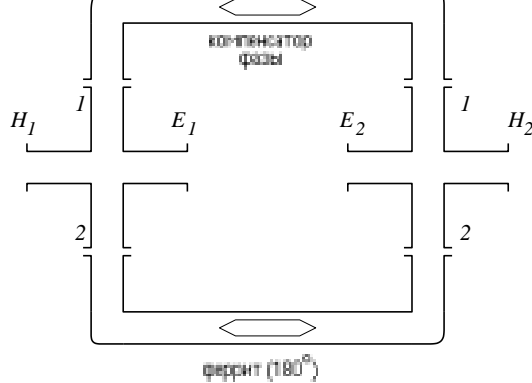
Обсудим условия поворота плоскости поляризации. Когда постоянное магнитное поле включено, происходит расщепление частот вырожденных мод с круговой поляризацией. Резонансная частота одной моды увеличивается, другой – уменьшается. В соответствии с этим возникают сдвиги по фазе возбужденных вращающихся мод относительно поля в возбуждающей линии $\pm\varphi$. Моды, вращающиеся в противоположном направлении, складываясь, дают стоячую волну, т.е. фактически линейно поляризованную структуру поля. Но плоскость поляризации оказывается повернутой на угол φ .

Угол φ в резонаторе равен, как известно,

$$\varphi = -\operatorname{arctg} Qx,$$

где Q – нагруженная добротность резонатора, $x = \frac{2\Delta\omega}{\omega}$ – относительная расстройка, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, ω_0 – резонансная частота. Заметим, что нагруженная добротность определяется в основном связью с волноводами, так как потери в намагниченном феррите малы.

Схема циркулятора на основе невязимного фазовращателя показана на рис. В качестве примера здесь приведен циркулятор на двойных тройниках.



Волна, поданная на вход, в плечо H_1 первого тройника, делится поровну в боковые плечи, соединенные двумя волноводами с боковыми плечами второго двойного тройника. В один из волноводов помещен невзаимный фазовращатель (сдвиг фазы в прямом направлении на 180° меньше, чем в обратном). В другой помещен обычный фазовращатель (вносимый сдвиг фазы равен сдвигу фазы невзаимного фазовращателя в прямом направлении). При распространении волн в волноводах в прямом направлении сдвиги фазы в обоих волноводах одинаковы, поэтому волны, складываясь, проходят в плечо H_2 второго тройника. При подаче волны на вход H_2 второго тройника волны, распространяясь по волноводам в обратном направлении, приобретают разность фаз 180° . Поэтому они, складываясь, проходят в плечо E_1 первого тройника. Нетрудно видеть, что циркуляция происходит по схеме $H_1 - H_2 - E_1 - E_2 - H_1 - \dots$ и т.д.

В реальных циркуляторах с невзаимным фазовращателем вместо двойных тройников для деления волны часто используют 3-дБ направленные ответвители, которые более широкополосны и компактны.

Список литературы

- [1] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
- [2] Теория линий передачи сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1951.
- [3] Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966.

- [4] Микаэлян А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963.
- [5] Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.; Л.: ОГИЗ – Гостехиздат, 1948.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Госиздат, 1959.
- [7] Альтман Дж. Устройства СВЧ. М.: Мир, 1968.
- [8] Левин П. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

Марлен Моисеевич Карлинер
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЧ
Курс лекций

Работа выполнена при содействии ФЦП “Интеграция”

Подписано в печать	01.99	Формат 60x84, 1/16
Печать офсетная.		Уч.-изд. л. 6,5
Тираж экз.		Заказ № .

Лицензия ЛР 02/285 от 6 мая 1998 г.;

Издательский центр НГУ;
630090, Новосибирск–90, ул. Пирогова, 2.